

De Rham-Kokettenkomplex und de Rham-Kohomologie

Vortrag 3 im Seminar "deRham-Kohomologie"
Tom Finken

Wiederholung: Gegeben eine Mannigfaltigkeit M , so ist $\Omega^p := \Gamma(\Lambda^p(T^\#)M)$ der Vektorraum der p -Linearformen, also all jener glatter Schnitte der p -ten äußeren Potenz des Kotangentialbündels $\Lambda^p(T^\#)M$. Folglich weist ein Element $\omega \in \Gamma(\Lambda^p(T^\#)M)$ jedem Punkt $x \in M$ eine (alternierende) Multilinearform $\omega_x \in \Lambda^p(T^\#_x M)$ zu. Eine Form ω heißt **geschlossen**, falls $d\omega = 0$ und **exakt**, falls $\exists \mu : d\mu = \omega$. Dies ermöglicht kartenunabhängige Differentiation und Integration auf einer Mannigfaltigkeit. Nun kann ein Element $v \in T_x M$ verstanden werden als Äquivalenzklasse von Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ und $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow (f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$. Dann ist für eine glatte Abbildung (0-Form) $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ die partielle Ableitung in Richtung eines Vektors gegeben durch $v(f) := (f \circ \gamma)'(0)$, das heißt, der Tangentialvektor v wird in $x \in M$ ausgewertet. Es ist weiters $T_x \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, denn jede Klasse von Kurven, die den Punkt $x \in \mathbb{R}$ nach Repräsentantenwahl durchläuft, wird mit diesem identifiziert. Dann lässt sich das Differential $D_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$ wegen $T_x \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ auffassen als Element $D_x f \in (T_x^\#)M$. Folglich definiert man eine Verallgemeinerung auf p -Formen:

Definition 1 (Äußeres Differential in Koordinatenform). Das **äußere Differential** $d^p : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ ist eine Abbildung, welche einer p -Form $w \in \Omega^p(M)$ eine $(p+1)$ -Form $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ zuweist. In lokalen Koordinaten $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, für eine p -Form $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, wird sie definiert durch

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} df_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad \text{mit } df_{i_1, \dots, i_p} = \sum_j \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} dx_j$$

Dieser Operator ist der einzige die folgenden Eigenschaften erfüllende:

Satz 2. (i) Für $p = 0$ stimmt d mit dem totalen Differential überein.

(ii) d^p ist linear für jedes p .

(iii) Für alle p gilt $d^{p+1} \circ d^p = 0$.

(iv) Es gilt die **graduierete Leibniz-Regel**: $d^p(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, $\omega_1 \in \Omega^p(M), \omega_2 \in \Omega^q(M)$

Beweis. (i), (ii), (iv) folgen durch Nachrechnen. Wir beweisen Eigenschaft (iii).

Sei $\omega \in \Omega^p(M)$ lokal in Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ gegeben mit $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, wobei $f_{i_1, \dots, i_p} \in C^\infty(M)$ für alle p gelte. Dann ist das Differential $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ gegeben durch

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Erneute Anwendung von d liefert:

$$d(d\omega) = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j=1}^n d \left(\frac{\partial f_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} \right) \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Da

$$d \left(\frac{\partial f_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_l \partial x_j} dx_l,$$

folgt

$$d(d\omega) = \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{j, l=1}^n \frac{\partial^2 f_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_l \partial x_j} dx_l \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen sowie $dx_l \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_l$ implizieren, dass sich alle Terme paarweise aufheben. Also folgt

$$d(d\omega) = 0.$$

□

Beispiel 3 (Für die wichtigen Operatoren grad, rot, div gelten $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$ und $\text{div}(\text{rot}(F)) = 0$).

Betrachte für eine glatte Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ das Gradientenfeld $\text{grad } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \text{grad}(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$.

Die Rotation eines Vektorfeldes $F = (F_1, F_2, F_3)$ ist gegeben durch

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich mittels des Satzes von Schwarz für $\text{rot}(\text{grad}(f))$:

$$\text{rot}(\nabla f) = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f \\ \partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f \\ \partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f \end{pmatrix} = 0.$$

Sei $F = (F_1, F_2, F_3)$ ein Vektorfeld. Die Divergenz eines Vektorfeldes $G = (G_1, G_2, G_3)$ ist gegeben durch

$$\text{div } G = \partial_x G_1 + \partial_y G_2 + \partial_z G_3.$$

Nach obiger Definition ergibt sich dann für $\text{div}(\text{rot}(F))$:

$$\text{div}(\text{rot } F) = \partial_x(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \partial_y(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \partial_z(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) = 0.$$

Definition 4 (Einschub: Differential für Kurven). Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ glatt sowie $x \in M$. Ein Tangentialvektor $v \in T_x M$ kann, wie in der Einleitung bemerkt, dargestellt werden als Äquivalenzklasse $v = [\gamma]_x$ aller glatter Kurven $\gamma: (0, 1) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$, wobei zwei Kurven γ_1 und γ_2 äquivalent sind, falls $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ (nicht abhängig von der Wahl eines Atlas). Dann wird das **Differential** $df_x(v) \in T_{f(x)} N$ mit $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ definiert durch

$$df_x([\gamma]_x) := [f \circ \gamma]_{f(x)}$$

wobei die Äquivalenzklasse auf N durch die Ableitung am Punkt $t = 0$ definiert ist, d.h.

$$df_x([\gamma]_x) = [(f \circ \gamma)'(0)]_{f(x)}.$$

Folglich bildet das Differential(nach Repräsentantenwahl) einen Tangentialvektor einer Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ im Punkt $x \in M$ ab auf den resultierenden Tangentialvektor der Bildkurve $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow N$ im Bildpunkt $(f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(x)$. Dies liefert eine wohldefinierte Abbildung $df_x(v): T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$. Ausgedrückt

in Koordinaten handelt es sich dabei um die Jakobi-Matrix.

Erinnerung: Eine glatte Funktion $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ kann als 0-Form $g \in \Omega^0(N)$ aufgefasst werden. Der Pullback entlang einer glatten Funktion $f: M \rightarrow N$ ist dann gegeben durch:

$$\Omega^0(f)g = f^*g := g \circ f.$$

Man erhält als Komposition glatter Funktionen eine wiederum glatte Funktion $\Omega^0(f)g \in \Omega^0(M)$. Dies wird im Folgenden verallgemeinert:

Definition 5 (Einschub: Pullback von p -Formen). Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \Omega^p(N)$ eine p -Form. Betrachte folgendes Diagramm von Tangentialbündeln über M und N :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ pr_M \downarrow & & \downarrow pr_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Dieses kommutiert. Allerdings lässt sich aufgrund der Kontravarianz von $Df^\#$ keine direkte Aussage im Analogon der Kotangentialbündel treffen:

$$\begin{array}{ccc} T^\# M & \xleftarrow{(Df)^\#} & T^\# N \\ pr_M \downarrow & & \downarrow pr_N \\ M & \xrightarrow{?} & N \end{array}$$

.Anwendung der p -ten äußeren Potenz (kovarianter Funktor $\Lambda^p(Df)^\#$) löst dieses Problem:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^p(T^\# M) & \xleftarrow{\Lambda^p((Df)^\#)} & \Lambda^p(T^\# N) \\ pr_M \downarrow & & \downarrow pr_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

. Es ist dann für $\omega \in \Omega^p(N)$ der Pullback entlang f die resultierende p -Form gegeben durch

$$\Omega^p(f)\omega = \Lambda^p((Df)^\#) \circ \omega \circ f: \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

Betrachtet man den Pullback als Auswertung von Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_p \in T_x M$ im Punkt $x \in M$, ist folgende Darstellung äquivalent:

$$(\Omega^p(f)\omega)_x(v_1, \dots, v_p) := \omega_{f(x)}(df_x(v_1), \dots, df_x(v_p)),$$

wobei $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ das Differential von f ist.

In lokalen Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ auf N lässt sich ω schreiben als $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. Dann ist der Pullback $\Omega^p(f)\omega \in \Omega^p(M)$ der p -Form ω entlang f in Koordinatenform gegeben durch

$$\Omega^p(f)\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} (a_{i_1, \dots, i_p} \circ f) \Omega^p(f) df_x(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}).$$

Insbesondere induziert damit jede glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung $\Omega^p(f): \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$.

Im Folgenden eine Visualisierung:

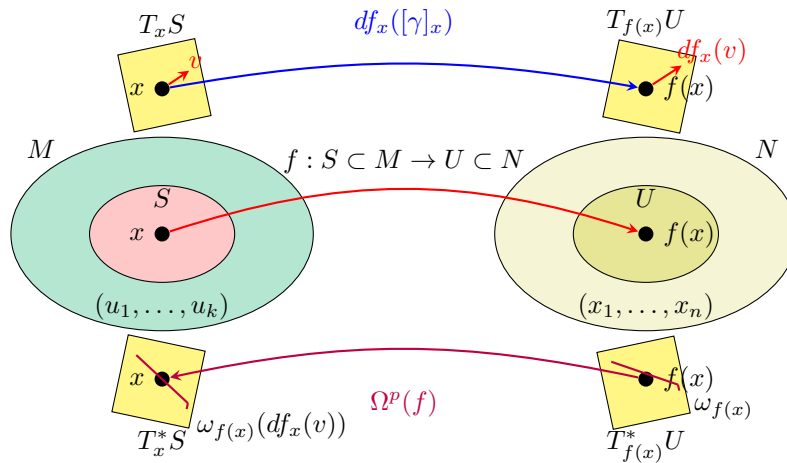


Diagramm: Veranschaulichung von Pullback und Pushforward.

Satz 6 (Natürlichkeit der äußeren Ableitung). *Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M, N und $w \in \Omega^p(N)$ eine glatte p -Form. Dann gilt*

$$d(\Omega^p(f)\omega) = \Omega^{p+1}(f)(d\omega),$$

das heißt, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(N) \\ \Omega^p(f) \downarrow & & \downarrow \Omega^{p+1}(f) \\ \Omega^p(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(M) \end{array}$$

.

Beweis. Betrachte nun den Spezialfall einer 0-Form $\omega \in \Omega^0(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\Omega^1(f)(d\omega))_x([\gamma]) &= d\omega_{f(x)}(df_x[\gamma]) \\ &= d\omega_{f(x)}([f \circ \gamma]) \\ &= [(\omega \circ f \circ \gamma)'(0)] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(f(\gamma(t))) \\ &= d(\omega \circ f)([\gamma]) \\ &= d(\Omega^0(f)\omega)_x([\gamma]). \end{aligned}$$

Sei nun $\omega \in \Omega^p(N)$ mit $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ gegeben. Einsetzen in die äußere Ableitung $d: \Omega^p(N) \rightarrow$

$\Omega^{p+1}(N)$ und Post-Komposition mit dem Pullback $\Omega^p(f)$ liefern:

$$\begin{aligned}
\Omega^{p+1}(f)(d\omega) &= \Omega^{p+1}(f) \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} da_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\
\text{Linearität} &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \Omega^1(f) (da_{i_1, \dots, i_p}) \wedge \Omega^p(f) df_x(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \right) \\
\text{Spezialfall} &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} d(\Omega^0(f)(a_{i_1, \dots, i_p})) \wedge \Omega^p(f) df_x(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \right) \\
\text{grad. Leibniz} &= d \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} ((a_{i_1, \dots, i_p} \circ f)) \Omega^p(f) df_x(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \right) \\
&= d(\Omega^p(f)(\omega)).
\end{aligned}$$

□

Folglich ist die äußere Ableitung ein von der Wahl des Koordinatensystems unabhängiger sowie eindeutiger, linearer Operator. Dies bedingt die folgende Definition:

Definition 7 (de Rham-Kokettenkomplex). Man definiert den **de Rham-Kokettenkomplex** als Familie von Vektorräumen $\Gamma(\Lambda^p(T^\# M)) = (\Omega^p)_{p \in \mathbb{Z}}$, zusammen mit dem äußeren Differential $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$, sodass $d \circ d = 0$ gilt. Es ergibt sich die folgende Sequenz:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Es ist $\Omega^{-1} := 0$ der Nullraum sowie ebenfalls $\Omega^p(M) = 0$ für $p > n = \dim(M)$. Wegen der Eigenschaft $d \circ d = 0$ gilt $B^p(M) := \text{Im}(d^p) \subseteq \text{Ker}(d^{p+1}) := Z^p(M)$, mithilfe dessen sich die zentrale Struktur des Seminars definieren lässt:

Definition 8. Die **p-te de Rham-Kohomologie** ist definiert als Kohomologie des de Rham-Kokettenkomplexes $(\Omega^p(M), d^p)$, d.h.

$$H_{dR}^p(M) := \frac{\text{Ker}(d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1})}{\text{Im}(d : \Omega^{p-1} \rightarrow \Omega^p)}.$$

Es enthält per definitionem $\text{Ker}(d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1})$ alle geschlossenen p -Formen und $\text{Im}(d : \Omega^{p-1} \rightarrow \Omega^p)$ alle exakten p -Formen. Elemente in $Z^p(M)$ werden als **Kozykel** und jene in $B^p(M)$ als **Koränder** von $H_{dR}^p(M)$ bezeichnet. Folglich misst $H_{dR}^p(M)$, inwieweit Kozykel auch Koränder sind. Ein Element $[\alpha] \in H_{dR}^p(M)$ wird mittels folgender Äquivalenzrelation bestimmt: Zwei Kozykel α, β heißen äquivalent, wenn $\alpha - \beta = d\eta$, ihre Differenz also ein Korand $\eta \in B^p(M)$ ist.

Auf Basis des Dachprodukts für Linearformen, i.e.

$$\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{p+q}(M), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta,$$

lässt sich auf $H_{dR}^p(M)$ ein äußeres Produkt wie folgt definieren:

$$H_{dR}^p(M) \times H_{dR}^q(M) \longrightarrow H_{dR}^{p+q}(M), \quad ([\alpha], [\beta]) \longmapsto [\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha \wedge \beta].$$

Nun gilt für die Ableitung des Keilprodukts nach der graduierten Leibniz-Regel für geschlossene α, β auch $d(\alpha \wedge \beta) = \underbrace{(d\alpha)}_0 \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \underbrace{(d\beta)}_0 = 0$, also ist dies ebenfalls geschlossen. Zu zeigen ist nun die Wohldefiniertheit des Keilprodukts auf Kohomologieklassen $[\alpha]$. Sei dazu $\alpha \sim \alpha'$ oder $\beta \sim \beta'$. Dann muss auch $\alpha \wedge \beta \sim \alpha' \wedge \beta$ bzw. $\alpha \wedge \beta \sim \alpha \wedge \beta'$ gelten. Zeige exemplarisch (anderer Fall analog) $\alpha \sim \alpha' \implies \alpha \wedge \beta \sim \alpha' \wedge \beta$. Per definitionem gilt $\alpha \sim \alpha' \iff \alpha - \alpha' = d\eta$ für einen Korand η . Dann folgt

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha' + d\eta) \wedge \beta = \alpha' \wedge \beta + (d\eta) \wedge \beta.$$

und damit

$$\alpha \wedge \beta - \alpha' \wedge \beta = d\eta \wedge \beta = d\eta \wedge \beta + (-1)^{p+1} \eta \wedge \underbrace{d\beta}_0 = d(\eta \wedge \beta).$$

Also ist $\alpha \wedge \beta \sim \alpha' \wedge \beta$ und die Abbildung ist wohldefiniert auf Kohomologieklassen. Damit bildet die de Rham-Kohomologie H_{dR}^p eine graduiert-kommutative Algebra.

Beispiel 9 ($p = 0$). Im Fall $p = 0$ ist $\text{Im}(d : \Omega^{-1} \longrightarrow \Omega^0) = \{0\}$, da nach Definition $\Omega^{-1} = 0$ gesetzt wird und d linear ist. Darüber hinaus ist wegen $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ auch $\text{Ker}(d : \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M)) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mid df = 0\}$. Folglich gilt

$$H_{dR}^0(M) \cong \frac{\text{Ker}(d : \Omega^0 \longrightarrow \Omega^1)}{\text{Im}(d : \Omega^{-1} \longrightarrow \Omega^0)} \cong \frac{\text{Ker}(d : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1})}{\{0\}} \cong \text{Ker}(d : \Omega^0 \longrightarrow \Omega^1) \cong \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mid df = 0\}.$$

Dies sind gerade die lokal-konstanten, reellwertigen Funktionen auf M . Ist nun M zusammenhängend, so ist jede lokalkonstante Funktion konstant und es kann jede Abbildung $\{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mid df = 0\}$ eindeutig durch die Wahl eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ bestimmt werden, also gilt $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}$. Bezeichne $L(M)$ alle Zusammenhangskomponenten von M und $|L(M)|$ die Zahl der Zusammenhangskomponenten, so folgt allgemeiner $H_{dR}^p(M) \cong \mathbb{R}^{|L(M)|}$.

Beispiel 10. Sei nun $M = \{x\}$. Dann ist $\dim(M) = 0$. Dann ergibt sich für die Sequenz des de Rham-Kokettenkomplex:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d=0} 0 \longrightarrow \dots$$

.Es ist nämlich wie in obigem Beispiel $B^0(M) = 0$. Da $d = 0$ die Nullabbildung ist, gilt $Z^0(M) = \mathbb{R}$, da es für den einzigen Punkt $x \in M$ eine Anzahl von $|\mathbb{R}|$ -vielen Abbildung gibt, die Kozykel sind. Folglich ist die de Rham-Kohomologie für $p > 0$ immer der Nullraum. Damit ergibt sich:

$$H_{dR}^p(x) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

Das folgende Beispiel legt konkret dar, dass nicht jeder Kozykel auch ein Korand ist:

Beispiel 11 (Nicht jedes wirbelfreie Vektorfeld ist ein Potenzial, nicht jeder Kozykel ist auch Korand). Wir geben ein Beispiel aus der Vektoranalysis: Seien $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $\omega \in \Omega^1(M)$ mit

$$w(x, y) = \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2} dx}_{P(x, y)} + \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2} dy}_{Q(x, y)},$$

gegeben. Nachrechnen liefert $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Folglich ist ω geschlossen, da mit der Formel der äußeren Ableitung gilt:

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0.$$

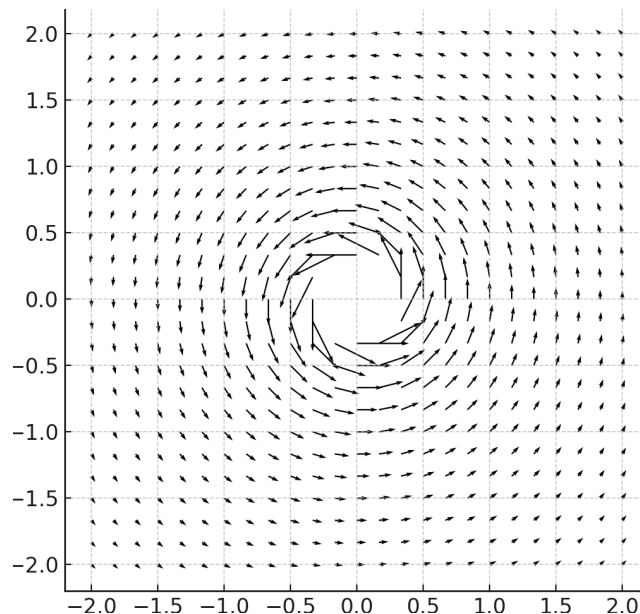
Angenommen, ω wäre auch exakt, i.e. $\exists f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : \omega = df$. Dann gilt nach dem in der nächsten Sitzung zu beweisenden Satz von Green (bzw. 2D-Stokes) notwendigerweise für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = 0.$$

Es ist aber mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\cos t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Folglich ist ω geschlossen, aber nicht exakt. Es folgt $\dim(H_{dR}^1) \geq 1$, denn es gilt mit Beispiel 9, dass wegen $Z^0(M) = \mathbb{R}$ für die Koränder $B^1(M) = \mathbb{R}$ ist. Im Folgenden eine Visualisierung des Vektorfeldes $\omega(x, y)$.



Satz 12 (Funktorialität von $H_{dR}^p(M)$). *Sei $\varphi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann induziert der Pullback von Differentialformen*

$$\Omega^p(f) : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M), \quad \omega \longmapsto \Omega^p(f)\omega,$$

einen Homomorphismus auf de Rham-Kohomologien:

$$H_{dR}^p(\varphi) = \varphi^* : H_{dR}^p(N) \longrightarrow H_{dR}^p(M), \quad [\omega] \longmapsto [\Omega^p(f)\omega].$$

Beweis. Nach Satz 6 gilt für jede p -Form ω , dass $d(\Omega^p(f)\omega) = \Omega^{p+1}(f)(d\omega)$. Damit folgt:

- Ist ω geschlossen ($d\omega = 0$), so ist auch $\Omega^p(f)\omega$ geschlossen.
- Ist ω exakt ($\exists \eta : \omega = d\eta$), so gilt $\Omega^p(f)\omega = d(\Omega^{p-1}(f)\eta)$; also ist $\Omega^p(f)\omega$ exakt.

Daher ist die Zuordnung $[\omega] \mapsto [\Omega^p(f)\omega]$ wohldefiniert. Für glatte Abbildungen $\varphi : M \rightarrow N$ und $\psi : N \rightarrow P$ gilt außerdem $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, und für die Identität $\text{id}_M : M \rightarrow M$ letztlich $(\text{id}_M)^* = \text{id}_{H_{dR}^p(M)}$. Damit ist H_{dR} ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der Vektorräume. $\square$

Satz 13 (Homotopieinvarianz von $H_{dR}^p(M)$). *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Sei $h : M \times [0, 1] \rightarrow N$ eine glatte Homotopie zwischen den glatten Abbildungen $f_0, f_1 : M \rightarrow N$. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{Z}$:*

$$H_{dR}^p(f_0) = H_{dR}^p(f_1).$$

Dieser kann verwendet werden, um folgenden Satz zu beweisen:

Satz 14 (Poincaré-Lemma). *Für jedes Sterngebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt*

$$H_{dR}^p(U) = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0. \end{cases}$$

Beweis. Der Fall $p = 0$ ist nur ein Spezialfall des obigen Beispiels 9. Sei also $p > 0$. Es bezeichne $p : U \rightarrow \{x\}$ die Projektion und $i : \{x\} \rightarrow U$ die Inklusion. Dann ist $p \circ i = \text{id}_{\{x\}}$. Da U als Sterngebiet insbesondere glatt zusammenziehbar und damit Homotopie-äquivalent zum Einpunktraum ist, gilt darüber hinaus auch $i \circ p \simeq \text{id}_U$. Dann folgt aus der Homotopieinvarianz (Satz 13), dass beide Abbildungen denselben Kohomologie-Isomorphismus induzieren, i.e.: $H_{dR}^p(i) : H_{dR}^p(U) \longrightarrow H_{dR}^p(\{x\})$ ist bijektiv für alle p , also

$$H_{dR}^p(U) \cong H_{dR}^p(\{x\}) \cong \{0\}.$$

$\square$

Literatur:

- * I. Madsen, J. Tornehave From Calculus to Cohomology. Cambridge University Press (1978). (1982)
- * W. Lück: Algebraische Topologie. Vieweg Verlag (2005).