Charakteristische Klassen
Seminar “deRham-Kohomologie”

Jussi Marttinen

M sei immer eine glatte, zusammenhängende, kompakte Mannigfaltigkeit. Sofern nicht angegeben sind alle Vektorbündel komplex.

Wir betrachten die *Komplexifizierung* des de Rham-Komplexes $\Omega^i(M;\mathbb{C}) := \Omega^i(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, werden sie einfach auch mit $\Omega^i(M)$ bezeichnen. Die darausstammende Kohomologietheorie bezeichnen wir mit $H^*(M;\mathbb{C})$; sie ist natürlich isomorph zu $H^*_{dR}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Für ein komplexes Bündel ξ über M ist der *Raum der Schnitte von* ξ, $\Omega^0(\xi)$, auch ein komplexer Vektorraum und schließlich ein $\Omega := \Omega^0(M;\mathbb{C})$-Modul. Wir schreiben $\Omega^i(\xi) = \Omega^i(M) \otimes_\Omega \Omega^0(M)$.

Wir erinnern uns an die Definition eines *Zusammenhangs*:

Definition 0.1. Ein (komplexer) *Zusammenhang* ∇ auf ξ ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\nabla : \Omega^0(\xi) \longrightarrow \Omega^1(\xi),$$

der die *Leibniz-Regel*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

für $f \in \Omega$, $s \in \Omega^0(\xi)$ erfüllt.

Ein Zusammenhang ∇ induziert eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen

$$\Omega^0(\xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(\xi) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^2(\xi) \xrightarrow{d^\nabla} \cdots$$

sodass

$$d^\nabla(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^i \omega \wedge d^\nabla \tau$$

für $\omega \in \Omega^i(M), \tau \in \Omega^j(\xi)$.

Dies ist im allgemein *kein* Kokettenkomplex! Die Komposition $d^\nabla \circ \nabla$ ist aber Ω-linear, und korrespondiert also zu einem Element $F^\nabla \in \Omega^2(\mathrm{End}(\xi))$[1], der *Krümmungsform* von ∇.

1 Invariante Polynome

Sei $\mathrm{Pol}(n) = \mathbb{C}[(x_{ij})_{1\le i,j\le n}]$ der komplexe Polynomring in n^2 Variablen, und sei $\mathrm{Pol}_k(n) \subseteq \mathrm{Pol}(n)$ die Untergruppe der homogenen Polynome vom Grad k. Wir schreiben $P(A)$ für $P((A_{ij}))$.

Definition 1.1. Ein Polynom $P \in \mathrm{Pol}_k(n)$ heißt *invariant*, falls

$$P(TAT^{-1}) = P(A) \quad \text{für alle} \quad T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Wir schreiben $\mathrm{Inv}_k(n)$ für die Untergruppe der invarianten Polynome in $\mathrm{Pol}_k(n)$.

Bemerkung 1.2. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ operiert auf $\mathrm{Pol}_k(n)$ durch $T \cdot P(A) = P(TAT^{-1})$. Die invarianten Polynome sind genau die Fixpunkte dieser Aktion, d.h. $\mathrm{Inv}_k(n) = \mathrm{Pol}_k(n)^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Das charakteristische Polynom von $-A$ ist

$$p_{-A}(t) = \det(tI + A) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k^n(A) t^{n-k}.$$

Beispiel 1.3. Die *Koeffizienten des charakteristischen Polynoms* $\sigma_k(A) := \sigma_k^n(A)$ sind invariante Polynome vom homogenen Grad k.

Beispiel 1.4. Das *k-te Spurpolynom* $s_k(A) = s_k^n(A) = \mathrm{Tr}(A^k)$ ist ein invariantes Polynom vom Grad k.

[1]Hier ist $\mathrm{End}(\xi)$ das *Endomorphismenbündel* über M mit Faser $\mathrm{End}(\xi)_p := \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\xi_p)$

Beispiel 1.5. Sei $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} t + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & t + a_{22} \end{pmatrix} = (t + a_{11})(t + a_{22}) - a_{12}a_{21}$$
$$= t^2 + (a_{11} + a_{22})t + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = t^2 + \mathrm{Tr}(A)t + \det(A).$$

Also $\sigma_0(A) = 1$, $\sigma_1(A) = \mathrm{Tr}(A)$, $\sigma_2(A) = \det(A)$.

Es gilt
$$s_0(A) = \mathrm{Tr}(A^0) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}) = 2.$$
$$s_1(A) = \mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & (a_{11} + a_{22})a_{12} \\ a_{21}(a_{11} + a_{21}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix}.$$

Schließlich
$$s_2(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}a_{21}.$$

Bemerkung 1.6. Für allgemeine $n \geq 1$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ gelten die Formel

$$\sigma_0(A) = 1,\ s_0(A) = n,\ \sigma_1(A) = s_1(A),\ \sigma_n(A) = \det(A),$$

und $\sigma_k(A) = 0$ für $k > n$.

Die invarianten Polynome s_k und σ_k sind eng verwandt, durch der *Newton'schen Identität*:

Lemma 1.7. *Für alle $m \geq 1$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} s_i(A)\sigma_{m-i}(A) = (-1)^{m-1} m\sigma_m(A). \tag{1}$$

Die Idee des Beweises, ist, die Identität zuerst für Diagonalmatrizen zu zeigen (durch algebraische Umformungen). Beiden Seiten der Gleichung 1 sind invariant, und somit gilt die Identität für alle diagonalisierbaren Matrizen.

Die Menge der diagonalisierbaren Matrizen ist dicht in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, und somit gilt die Identität für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. $\square$

Für $m = 2$ erhalten wir durch Umformen

$$s_2(A) = s_2(A)\sigma_0(A) = s_1(A)\sigma_1(A) - 2\sigma_2(A) = \sigma_1(A)^2 - 2\sigma_2(A).$$

oder äquivalent

$$\sigma_2(A) = \frac{\sigma_1(A)^2}{2} - \frac{s_2(A)}{2} = \frac{s_1(A)^2}{2} - \frac{s_2(A)}{2}.$$

Allgemeiner erhalten wir das folgende

Korollar 1.8. *Es existieren Polynome* $P_m \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, $Q_m \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ *sodass*

$$s_m(A) = P_m(\sigma_1(A), \dots, \sigma_m(A)) \text{ und } \sigma_m(A) = Q_m(s_1(A), \dots, s_m(A)).$$

Eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der symmetrischen Polynome [Bos23, Kap. 4.3, Satz 5] sagt:

Satz 1.9. *Für jedes invariante Polynom* $P \in \mathrm{Inv}_k(n)$ *existiert ein Polynom* $q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ *sodass*

$$P(A) = q(\sigma_1(A), \dots, \sigma_k(A)). \tag{2}$$

Die Polynome (σ_i) (oder äquivalent (s_i)), generieren also $\mathrm{Inv}(n) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{Inv}_k(n)$ als $\mathbb{C}$-Algebra.

2 Charakteristische Klassen von komplexen Bündeln

Sei ξ ein komplexes Vektorbündel mit Rang n über M, und $P \in \mathrm{Inv}_k(n)$. Wir wollen eine Abbildung

$$\Omega^2(\mathrm{End}(\xi)) \longrightarrow \Omega^{2k}(M; \mathbb{C}), \quad \phi \mapsto P(\phi)$$

definieren.

Konstruktion: Wir wählen $U \subseteq M$ und einen lokalen Rahmen $e = (e_1, \ldots, e_n) \subseteq \Omega^0(\xi|_U)$ von $\xi|_U$. Auf U ist $\mathrm{End}(\xi)$ trivialisierbar:

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(\xi)|_U &\xrightarrow{\cong} U \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \\ (p, F_p : \xi_p \to \xi_p) &\longmapsto (p, F_p e_1(p), \ldots, F_p e_n(p)). \end{aligned}$$

So erhalten wir ein Isomorphismus

$$\Omega^2(\mathrm{End}(\xi)|_U) \cong \Omega^2(U \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Mat}_n(\Omega^2(U; \mathbb{C})).$$

Die Komposition schickt ein Element $\omega \otimes F \in \Omega^2(\mathrm{End}(\xi)|_U)$ auf $(F_{ij}\omega)_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^2(U; \mathbb{C}))$, wobei $Fe_i = \sum F_{ij} e_j$ für glatte Funktionen $F_{ij} \in \Omega^0(U)$.

Eine 2-Form $R = \omega \otimes F$ von $\mathrm{End}(\xi)|_U$ ist also nichts anderes als eine $n \times n$-Matrix von 2-Formen $R(e) = (F_{ij}\omega)_{ij}$. Das äußere Produkt von Differentialformen ist kommutativ in geraden Dimensionen, d.h. wir können $P(R(e)) = P(F_{ij}\omega) \in \Omega^{2k}(U; \mathbb{C})$ formen.

Um eine globale Konstruktion zu erhalten, müssen wir zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl des Rahmens ist. Sei also $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ ein anderer Rahmen von $\xi|_U$. Dann existiert eine invertierbare Matrix von glatten Funktionen $A = (A_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^0(U))$, sodass $e' = Ae$.

Sei $F \in \Omega^2(\mathrm{End}(\xi)|_U)$. Wir schreiben $Fe_i = \sum F_{ij} e_j$ und $Fe'_i = \sum F'_{ij} e'_j$. Es gilt

$$\sum_{i,k} F'_{ij} A_{ik} e_k = \sum_i F'_{ij} e'_i = F(e'_j) = \sum_k A_{jk} F(e_k) = \sum_{i,k} A_{jk} F_{i,k} e_i,$$

und also

$$\sum_k F'_{kj} A_{ki} = \sum_k A_{jk} F_{ik}.$$

Äquivalent, $F(e) = A^T F(e') (A^T)^{-1}$. Aus der Invarianz von P folgt nun $P(F(e)) = P(F(e'))$, wie gewünscht.

Wir fixieren einen Zusammenhang ∇ auf ξ. Nun können wir unsere Konstruktion auf die Krümmungsform F^∇ ausüben, und wir erhalten ein $2k$-Form $P(F^\nabla)$. Eine natürliche Frage ist, wann diese geschlossen ist. Die erstaunliche Antwort ist: immer!

Lemma 2.1. *Für jedes $P \in \mathrm{Inv}_k(n)$ ist $P(F^\nabla)$ eine geschlossene Form.*

Beweis. Sei zuerst $P = s_k$. Es gilt:

$$ds_k(A) = d\,\mathrm{Tr}(A^{\wedge k}) = \mathrm{Tr}(d^\nabla(A^{\wedge k})) = \mathrm{Tr}\left(\sum \pm d^\nabla(A) \wedge A^{\wedge(k-1)}\right).$$

Aber für $A = F^\nabla$ verschwindet die rechte Seite, da $d^\nabla F^\nabla = 0$.

Wenn $P \in \mathrm{Inv}_k(n)$ beliebig ist, so existiert nach Satz 1.9 und Korollar 1.8 ein Polynom $q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$ sodass

$$P(F^\nabla) = q(s_1(F^\nabla), \ldots, s_k(F^\nabla)).$$

Die rechte Seite der Gleichung ist ein Polynom in geschlossenen Formen und damit geschlossen. □

Noch überraschender ist, dass die Kohomologieklasse gar nicht von der Wahl vom Zusammenhang abhängt.

Lemma 2.2. *Für zwei Zusammenhänge ∇_0, ∇_1 auf ξ gilt $[P(F^{\nabla_0})] = [P(F^{\nabla_1})]$ in $H^{2k}(M; \mathbb{C})$.*

Beweis. Der Beweis ist eine Art "Homotopieargument". Die Projektion $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ induziert ein Vektorbündel $\pi^*\xi$ über $M \times \mathbb{R}$. Die Zusammenhänge ∇_i induzieren Zusammenhänge $\tilde{\nabla}_i = \pi^*\nabla_i$ von $\pi^*\xi$.

Wir definieren einen neuen Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ auf $\pi^*\xi$ durch

$$\tilde{\nabla}(s)(p,t) = (1-t)\tilde{\nabla}_0(s)(p,t) + t\tilde{\nabla}_1(s)(p,t)^2$$

für $s \in \Omega^0(\pi^*\xi)$.

Seien $\iota_t : M \to M \times \mathbb{R}$ die Inklusion $p \mapsto (p,t)$. Für jeden Schnitt $s \in \Omega^0(\pi^*\xi)$ gilt

$$\iota_0^*(\tilde{\nabla}s)(p) = \tilde{\nabla}(s)(p,0) = \tilde{\nabla}_0(s)(p) = \nabla_0(\iota_0^* s)(p),$$

d.h., das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(\pi^*\xi) \arrow[r, "\tilde{\nabla}"'] \arrow[d, "\iota_0^*"'] & \Omega^1(\pi^*\xi) \arrow[d, "\iota_0^*"] \\
\Omega^0(\xi) \arrow[r, "\nabla_0"'] & \Omega^1(\xi)
\end{tikzcd}$$

[2] Der Raum von Zusammenhänge ist konvex, d.h. $\sum a_j \nabla_j$ mit $a_j \in \Omega$ ist ein Zusammenhang (genau dann) wenn $\sum a_j \equiv 1$ gilt.

Diese Eigenschaft charakterisiert eindeutig $\iota_0^*\tilde{\nabla}$ ([MT97, Lemma 17.10]), und schließlich $\iota_0^*\tilde{\nabla} = \nabla_0$. Mit einem ähnlichen Argument erhalten wir $\iota_0^* d^{\tilde{\nabla}} = d^{\nabla_0}$, und somit erfüllen die Krümmungsforme $F^{\nabla_0} = \iota_0^* F^{\tilde{\nabla}}$. Schließlich $P(F^{\nabla_0}) = \iota_0^* P(F^{\tilde{\nabla}})$.

Komplett analog erhalten wir auch $P(F^{\nabla_1}) = \iota_1^* P(F^{\tilde{\nabla}})$.

Aber die Abbildungen ι_0, ι_1 sind homotop und erzeugen deshalb dieselbe Abbildung auf Kohomologie. Schließlich

$$[P(F^{\nabla_0})] = \iota_0^*[P(F^{\tilde{\nabla}})] = \iota_1^*[P(F^{\tilde{\nabla}})] = [P(F^{\nabla_1})].$$

□

Definition 2.3. Die Abbildung

$$\mathrm{Inv}_k(n) \longrightarrow H^{2k}(M;\mathbb{C}), \quad P \mapsto \left[P(F^{\nabla})\right]$$

wird der *Chern-Weil-Homomorphismus* genannt. Wir schreiben $P(\xi) := [P(F^{\nabla})]$, da dies unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs ist.

Der Chern-Weil-Homomorphismus ist verträglich mit Pullbacks:

Proposition 2.4. *Sei $f : N \to M$ glatt und $P \in \mathrm{Inv}_k(n)$. Dann gilt*

$$f^* P(\xi) = P(f^*\xi).$$

Beweis. Wir wählen den induzierten Zusammenhang $f^*\nabla$ auf $f^*\xi$. Dann ist $F^{f^*\nabla} = f^* F^{\nabla}$ und schließlich

$$P(F^{f^*\nabla}) = P(f^* F^{\nabla}) = f^* P(F^{\nabla}),$$

da Pullbacks mit dem äußeren Produkt verträglich sind. □

Jetzt können wir die Chernklassen und Cherncharakterklassen definieren:

Definition 2.5. Die *k-te Chernklasse von* ξ ist

$$c_k(\xi) := \left[\sigma_k\left(\frac{-1}{2\pi i}F^\nabla\right)\right] \in H^{2k}(M;\mathbb{C}).$$

Die *k-te Cherncharakterklasse von* ξ ist

$$\mathrm{ch}_k(\xi) := \frac{1}{k!}\left[s_k\left(\frac{-1}{2\pi i}F^\nabla\right)\right] \in H^{2k}(M;\mathbb{C}).$$

Bemerkung 2.6. Bemerkung 1.6 ergibt

$$c_0(\xi) = 1, \quad \mathrm{ch}_0(\xi) = n, \quad c_1(\xi) = \mathrm{ch}_1(\xi), \quad \text{und} \quad c_k(\xi) = 0$$

für $k > n = \mathrm{rk}(\xi)$.

Für triviale Bündel lassen sich die Chernklassen leicht ausrechnen:

Beispiel 2.7. Sei $\xi = \varepsilon_n$ das triviale Bündel über M. Dann ist

$$\nabla : \Omega^0(\varepsilon_n) \to \Omega^1(\varepsilon_n), \quad (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto (ds_1, \ldots, ds_n)$$

ein Zusammenhang auf ε_n. Mit der Identifikation $\Omega^i(\varepsilon_n) \cong \bigoplus_{j=1}^n(\Omega^i(M))$ ist ∇ genau der Operator

$$\bigoplus_{j=1}^n d^0 : \bigoplus_{j=1}^n \Omega^0(M) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^n \Omega^1(M),$$

und also $d^\nabla = \bigoplus_{j=1}^n d^i$ und $F^\nabla = \bigoplus_{j=1}^n(d^1 \circ d^0) = 0$. Schließlich

$$c_k(\varepsilon_n) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{ch}_k(\varepsilon_n) = 0 \quad \text{für alle} \quad k > 0.$$

Hat ein Vektorbündel also nicht-triviale Chernklassen, so ist es kein triviales Bündel!

Sei $\xi = \eta_1$ das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, und sei

$$I : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [\omega] \longmapsto \int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} \omega$$

der Integrationshomomorphismus.

Satz 2.8. *Es gilt*

$$I(c_1(\eta_1)) = -1.$$

Beweis. Wir betrachten die Karte

$$\varphi_0 : U_0 := \{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \mid z_0 \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad [z_0, z_1] \mapsto z_1/z_0$$

auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Wie in [MT97, Beispiel 17.9] lässt ein Zusammenhang ∇ auf η_1 definieren sodass für $g = (\varphi_1)^{-1}$ gilt:

$$g^*(F^\nabla) = \frac{2i}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dx \wedge dy.$$

Wir betrachten die Koordinaten (r, θ) auf $\mathbb{C}^\times$ mit $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Dann gilt

$$dx = d(r\cos\theta) = r\, d(\cos\theta) + \cos\theta\, dr = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

und $dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$. Insgesamt erhalten wir

$$dx \wedge dy = -r\sin\theta \cdot \sin\theta\, d\theta \wedge dr + r\cos\theta \cdot \cos\theta\, dr \wedge d\theta = r\, dr \wedge d\theta.$$

Schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} g^*(F^\nabla) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{2ir\, dr \wedge d\theta}{(1 + r^2)^2} = 4\pi i \int_0^\infty \frac{r\, dr}{(1 + r^2)^2} \\ = &- 2\pi i \int_0^\infty \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1 + r^2}\right) dr = -2\pi i \left[(1 + r^2)^{-1}\right]_0^\infty = 2\pi i.\end{aligned}$$

Nach Definition des Integrals gilt

$$\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} F^\nabla = \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_0)^{-1}(\rho_0 F^\nabla) + \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_1)^{-1}(\rho_1 F^\nabla) \tag{3}$$

für eine Zerlegung der Eins ρ_0, ρ_1 mit Träger auf U_0, U_1.

Fûr $t > 0$ wählen wir ρ_0^t sodass $\operatorname{supp} \rho_0^t \subseteq \varphi_0(B(t, 0))$. Im Limes $t \to 0$ geht dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_0)^{-1}(\rho_0^t F^\nabla) \longrightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_1)^{-1}((1 - \rho_0^t) F^\nabla) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} g^*(F^\nabla) = 2\pi i,$$

und schließlich

$$I(c_1(\eta_1)) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} F^\nabla = -1.$$

□

Bemerkung 2.9. Nach Korollar 1.8 existieren Polynome $\tilde{P}_m, \tilde{Q}_m \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ sodass

$$\mathrm{ch}_k(\xi) = \tilde{P}_k(c_1(\xi), \dots, c_k(\xi))$$

und

$$c_k(\xi) = \tilde{Q}_k(\mathrm{ch}_1(\xi), \dots, \mathrm{ch}_k(\xi)).$$

Die Chernklassen und die Cherncharakterklassen enthalten also genau die gleiche Information über ein Vektorbündel. z.B. $\mathrm{ch}_2(\xi) = \frac{c_1(\xi)^2}{2} - c_2(\xi)$.

Bemerkung 2.10. Das Endomorphismenbündel $\mathrm{End}(\xi)$ hat einen kanonischen Schnitt

$$\mathrm{id} : M \to \mathrm{End}(\xi), \quad \mathrm{id}(p) = \mathrm{id}_{\xi_p} \in \mathrm{End}(\xi),$$

der nirgendwo verschwindet. Wenn $\xi = L$ ein Linienbündel ist, so hat $\mathrm{End}(L)$ Rang 1 und ist damit isomorph zum trivialen Bündel ε_1. Also ist $F^\nabla \in \Omega^2(\mathrm{End}(L)) \cong \Omega^2(M)$ eine 2-Form auf M, und

$$s_k(F^\nabla) = (F^\nabla)^{\wedge k}.$$

Nun erhalten wir die Identität

$$\mathrm{ch}_k(L) = \frac{1}{k!}\,\mathrm{ch}_1(L)^k = \frac{c_1(L)^k}{k!}.$$

Der *Cherncharakter* $\mathrm{ch}(\xi) := \sum_{k \geq 0} \mathrm{ch}_k(\xi) \in H^*(M; \mathbb{C})$ erfüllt also die formale Identität

$$\mathrm{ch}(L) = \exp(c_1(L)) =: \sum_{k \geq 0} \frac{c_1(L)^k}{k!}. \tag{4}$$

Die Chernklassen und Cherncharakterklassen erfüllen eine Vielzahl von Identitäten:

Proposition 2.11. *Die folgenden Identitäten gelten:*

(i) $c_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} c_i(\xi) c_{k-i}(\eta)$

(ii) $\mathrm{ch}_k(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}_k(\xi) \oplus \mathrm{ch}_k(\eta)$

(iii) $\mathrm{ch}_k(\xi \otimes \eta) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{ch}_i(\xi)\,\mathrm{ch}_{k-i}(\eta)$.

Alle drei lassen sich von den folgenden Identitäten für s_k und σ_k herleiten:

Lemma 2.12. *Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $B \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$. Die* Blocksumme $A \oplus B \in \mathrm{Mat}_{n+m}(\mathbb{C})$ *ist gegeben durch*

$$A \oplus B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

das Kronecker-Produkt $A \otimes B \in \mathrm{Mat}_{n \cdot m}(\mathbb{C})$ *ist gegeben durch*

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Identitäten:

(i) $\sigma_k(A \oplus B) = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i(A) \sigma_{k-i}(B)$

(ii) $s_k(A \oplus B) = s_k(A) + s_k(B)$

(iii) $s_k(A \otimes B) = s_k(A) s_k(B)$

Beweis von Proposition 2.11. Teile (i) und (ii) folgen leicht aus Lemma 2.12 nach der Wahl von dem natürlichen Zusammenhang $\nabla_\xi \oplus \nabla_\eta$ auf $\xi \oplus \eta$.

Für (iii) betrachten wir den induzierten Zusammenhang

$$\nabla_\otimes(s \otimes t) = \nabla_\xi(s) \wedge t + s \wedge \nabla_\eta(t)$$

auf $\xi \otimes \eta$. Es gilt

$$F^{\nabla_\otimes} = F^{\nabla_\xi} \wedge \mathrm{id}_\eta + \mathrm{id}_\xi \wedge F^{\nabla_\eta},$$

wobei $\mathrm{id}_\eta \in \Omega^2(\mathrm{End}(\eta))$ auf jede Faser die Identitätsabbildung ist.

Wir nehmen das k-fache äußere Produkt und erhalten

$$(F^{\nabla_\otimes})^{\wedge k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (F^{\nabla_\xi})^{\wedge i} \wedge (F^{\nabla_\eta})^{\wedge (k-i)}.$$

Das ergibt

$$s_k(F^{\nabla_\otimes}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} s_i(F^{\nabla_\xi}) \wedge s_{k-i}(F^{\nabla_\eta}).$$

und daraus folgt die Identität schon. □

Wir bezeichnen mit η_n das kanonische Linienbündel über $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Nun sind wir in der Lage, eine axiomatische Charakterisierung für die Chernklassen zu beweisen:

Satz 2.13. *Die Chernklassen $c_k(\xi) \in H^{2k}(M;\mathbb{C})$ sind eindeutig definiert durch die folgenden Eigenschaften:*

(i) *$c_k(\xi)$ hängt nur von der Isomorphieklasse von ξ ab.*

(ii) *$I(c_1(\eta_1)) = -1$, $c_k(\eta_n) = 0$ für $k > 1$, $c_0(\eta_n) = 1$.*

(iii) *$f^* c_k(\xi) = c_k(f^*\xi)$ für jede glatte $f : N \to M$*

(iv) *$c_k(\xi \oplus \xi') = \sum_{i=0}^{k} c_i(\xi) c_{k-i}(\xi')$*

Beweis. Eindeutigkeit:

Fall 1: $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\xi = \eta_n$.

Die Inklusion $j : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ induziert einen Isomorphismus

$$j^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1;\mathbb{C}).$$

Außerdem $j^*(\eta_n) = \eta_1$, und aus (iii) folgt

$$c_1(\eta_n) = (j^*)^{-1} c_1(\eta_1).$$

und die rechte Seite ist eindeutig bestimmt nach (ii).

Fall 2: M beliebig, $\xi = L : E \to M$ ein Linienbündel.

Sei $L^\perp$ ein Komplement zu L, sodass $L \oplus L^\perp = \varepsilon_{n+1}$. Für $p \in M$ ist L_p eine Gerade in $\mathbb{C}^{n+1}$, d.h. ein Element von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Die Abbildung

$$g : M \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \quad g(p) = L_p$$

ist glatt. Wir definieren

$$\tilde{g} : E \longrightarrow S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C}, \quad \tilde{g}(p, v) = (L_p, v),$$

sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{g}} & S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbb{C} \\ {\scriptstyle L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_n} \\ M & \xrightarrow[g]{} & \mathbb{C}\mathrm{P}^n \end{array} \tag{5}$$

Also ist $(\tilde{g}, g)$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln. (5) ist sogar ein Pullbackdiagramm, d.h. $L = g^*\eta_n$. Nach (iii) und Fall 1 ist $c_k(L) = g^*c_k(\eta_n)$ eindeutig bestimmt.

Fall 3: $\xi = \bigoplus_{i=1}^n L_i$, mit L_i Linienbündel.

Mit Induktion über n und (iv) ist $c_k(\xi)$ eindeutig von $c_i(L_j)$ bestimmt, und wir sind im Fall 2.

Fall 4: ξ beliebig.

Dies folgt aus Fall 3 und dem Spaltungsprinzip:

Satz 2.14 (Spaltungsprinzip)**.** *Sei ξ ein komplexes Vektorbündel auf M mit $n = \mathrm{rk}\,\xi$. Dann existiert eine Mannigfaltigkeit $T = \mathrm{Sp}(\xi)$ und eine eigentliche, glatte Abbildung $f : T \to M$, sodass:*

(i) $f^* : H^k(M) \to H^k(T)$ ist injektiv für jede $k \geq 0$

(ii) $f^*\xi \cong \bigoplus_{i=1}^n L_i$, wobei L_i Linienbündel auf T sind.

□

Bemerkung 2.15. Wir sehen auch, dass die Chernklassen und Chern-charakterklassen tatsächlich reelle Kohomologieklassen sind: Für Linienbündel folgt dies aus dem Beweis von Fall 2 und für allgemeine Vektorbündel gilt dies wegen Eigenschaft (iv) und dem Spaltungsprinzip.

Definition 2.16. Die *totale Chernklasse* ist

$$c(\xi) = \sum_{k \geq 0} c_k(\xi) \in H^*(M; \mathbb{C}).$$

Aus Proposition 2.11 erhalten wir die Identität

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta) \tag{6}$$

Für eine Summe von Linienbündeln $\xi = \bigoplus_{i=1}^n L_i$ gilt also

$$c(\xi) = \prod_{i=1}^n c(L_i) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(L_i)).$$

Mit Satz 2.14 können wir weitere algebraische Identitäten überprüfen:

Proposition 2.17. *Die folgenden Eigenschaften gelten*

(i) $c_k(\xi^*) = (-1)^k c_k(\xi)$

(i') $\mathrm{ch}_k(\xi^*) = (-1)^k \mathrm{ch}_k(\xi)$

(ii) Für reelle Vektorbündel η *und alle* $k \geq 0$ *gilt*

$$c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = 0 = \mathrm{ch}_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}).$$

Beweis. Nach Satz 2.14 reicht es die Identitäten für Summen von Linienbündeln zu überprüfen.

(i) Wenn $\xi = L$ ein Linienbündel ist, so ist $L^* \otimes L = \mathrm{Hom}(L, L)$ das triviale Bündel. Mit Proposition 2.11 (iii) und Beispiel 2.6 erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = c_1(L^* \otimes L) &= \mathrm{ch}_1(L^* \otimes L) \\ &= \mathrm{ch}_1(L^*)\,\mathrm{ch}_0(L) + \mathrm{ch}_0(L^*)\,\mathrm{ch}_1(L) = c_1(L^*) + c_1(L). \end{aligned}$$

Wenn ξ eine Summe von Linienbündeln L_i ist, so gilt

$$c(\xi^*) = c\left(\bigoplus_i L_i^*\right) = \prod_i (1 + c_1(L_i^*)) = \prod_i (1 - c_1(L_i))$$

in $H^*(M;\mathbb{C})$. Mit Vergleichen des $H^{2k}(M;\mathbb{C})$-Teils erhalten wir $c_k(\xi^*) = (-1)^k c_k(\xi)$.

(i') Für Linienbündel L gilt

$$\operatorname{ch}_k(L^*) = \frac{c_1(L^*)^k}{k!} = \frac{(-1)^k c_1(L)}{k!} = (-1)^k \operatorname{ch}_k(L).$$

Für eine Summe von Linienbündeln können wir Proposition 2.11 (ii) verwenden.

Sei $\langle -, - \rangle$ eine Metrik auf η. Dann ist

$$f : \eta \longrightarrow \eta^*, \quad u \mapsto \langle u, - \rangle$$

ein Isomorphismus und induziert also einen Isomorphismus

$$f_* : \eta_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\eta^*)_{\mathbb{C}} \cong (\eta_{\mathbb{C}})^*.$$

Mit (i) erhalten wir nun

$$c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}) = c_{2k+1}((\eta_{\mathbb{C}})^*) = -c_{2k+1}(\eta_{\mathbb{C}}),$$

und analog für $\operatorname{ch}_k(\eta_{\mathbb{C}})$. □

Korollar 2.18. *η_n ist nicht isomorph zu seinem Dual.*

Beweis. Nach Proposition 2.17 gilt

$$c_1(\eta_n) = -c_1(\eta_n^*).$$

Es reicht also zu zeigen, dass dieses Element nicht null ist. Für $n = 1$ gilt $I(c_1(\eta_1)) = -1$, und für $n > 1$ gilt

$$j^* c_1(\eta_n) = c_1(j^* \eta_n) = c_1(\eta_1) \neq 0,$$

also ist $c_1(\eta_n) \neq 0$. □

3 Anwendungen

3.1 $\tau_{\mathbb{C}\mathbf{P}^n}$

Sei $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Wir sind nun in der Lage, die Chernklassen des Tangentialbündels $\tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ zu berechnen. Dafür betrachten wir das kanonische Linienbündel η über $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, und das orthogonale Bündel $\eta^\perp$ mit Totalraum

$$E = \{(L, u) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid u \in L^\perp\}.$$

Lemma 3.1.

$$\mathrm{Hom}(\eta, \eta^\perp) \cong \tau_{\mathbb{C}P^n}.$$

Beweis. [3] Sei $L \subseteq C^{n+1}$ eine Gerade durch 0. Die Projektion $p : S^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ induziert Identifikationen

$$T_{\lambda x} p(\lambda x, \lambda v) = T_x p(x, v)$$

für jedes $\lambda \in S^1$ und $(x, v) \in T_x S^{2n} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Also können wir $T_L \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ auf eine natürliche Weise mit

$$A(L) = \{[x, v] \mid x \cdot x = 1, x \cdot v = 0\} \subseteq (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1})/S^1 = \mathbb{C}^{n+1} \times_{S^1} \mathbb{C}^{n+1}$$

identifizieren.

Aber ein $[x, v] \in A(L)$ korrespondiert zu einer linearen Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}(L, L^\perp)$, die durch $\varphi(x) = v$ gegeben ist. Diese Identifikationen $T_L \mathbb{C}\mathrm{P}^n \cong \mathrm{Hom}(\eta, \eta^\perp)_L$ sind natürlich und insgesamt erhalten wir einen Isomorphismus

$$\tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} \cong \mathrm{Hom}(\eta, \eta^\perp).$$

$\square$

Hieraus folgt leicht:

Satz 3.2. *Die totale Chernklasse von $\tau_{\mathbb{C}P^n}$ ist gegeben durch*

$$c(\tau_{\mathbb{C}P^n}) = (1 - c_1(\eta))^{n+1}. \tag{7}$$

[3] Angepasst aus [MS74, Lemma 4.4]

Beweis. Nach dem obigen Lemma gilt

$$\tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} \oplus \varepsilon^1_{\mathbb{C}} = \tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} \oplus \mathrm{Hom}(\eta, \eta) \cong \mathrm{Hom}(\eta, \eta^\perp \oplus \eta) \cong \mathrm{Hom}(\eta, \varepsilon^{n+1}_{\mathbb{C}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n+1} \eta^*.$$

Die totale Chernklasse ist exponentiell, und so

$$c(\tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}) = c(\tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n})c(\varepsilon^1_{\mathbb{C}}) = c(\tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} \oplus \varepsilon^1_{\mathbb{C}}) = c\left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} \eta^*\right)$$
$$= c(\eta^*)^{n+1} = (1 - c_1(\eta))^{n+1}.$$

□

3.2 Das Kobordismusproblem[4]

Sei M eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension m.

Eine natürliche Frage ist, ob M ein *Rand* ist, d.h. ob es eine orientierte $(m+1)$-Mannigfaltigkeit mit Rand N existiert, sodass $M = \partial N$.

Für $m = 4k$ gibt die $2k$te Chernklasse gibt ein notwendiges Kriterium:

Satz 3.3. *Sei M eine kompakte, orientierte $4k$-Mannigfaltigkeit. Wenn M ein Rand ist, dann gilt $c_{2k}(\tau_M \otimes \mathbb{C}) = 0$.*

Beweis. Sei $\iota : M = \partial N \to N$ die Inklusion. Dann ist $\tau_M \oplus \varepsilon^1_{\mathbb{R}} = \iota^*(\tau_N)$. Durch Komplexifizieren erhalten wir

$$(\tau_M \otimes \mathbb{C}) \oplus \varepsilon^1_{\mathbb{C}} \cong \iota^*(\tau_N \otimes \mathbb{C}),$$

und schließlich gilt für die Chernklassen

$$c_{2k}(\tau_M \otimes \mathbb{C}) = \iota^* c_{2k}(\tau_N \otimes \mathbb{C}).$$

$c_{2k}(\tau_M \otimes \mathbb{C})$ wird von $4k = \dim M$-Formen repräsentiert, also können wir sie über M integrieren.

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir

$$\int_M c_{2k}(\tau_M \otimes \mathbb{C}) = \int_M \iota^* c_{2k}(\tau_N \otimes \mathbb{C}) = \int_N d(c_{2k}(\tau_N \otimes \mathbb{C})) = 0,$$

da die Chernklasse eine Kohomologieklasse ist. Nach Poincaré-Dualität ist $I = \int_M : H^m(M; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein Isomorphismus, und schließlich $c_{2k}(\tau_M \otimes \mathbb{C}) = 0$. □

[4] Angepasst aus [Tu17, §26.3]

Bemerkung 3.4. Allgemeiner könnten wir statt $\int_M c_{2k}(\tau)$ die sogenannten *Pontrjaginzahlen* der Form

$$\int_M c_2(\tau_M \otimes \mathbb{C})^{i_1} \wedge \cdots \wedge c_{2k}(\tau_M \otimes \mathbb{C})^{i_k} \in \mathbb{C}$$

untersuchen, wobei $i_1, \ldots, i_k$ natürliche Zahlen mit $i_1+2i_2+\cdots+ki_k = k$ sind (sodass der Integrand tatsächlich eine $4k$-Form ist). Eine direkte Verallgemeinerung vom Satz 3.3 sagt, dass für einen Rand M mit $\dim M = 4k$ alle Pontrjaginzahlen verschwinden müssen.

Beispiel 3.5. $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n}$ ist kein Rand.

Beweis. Das Tangentialbündel $\tau = \tau_{\mathbb{C}\mathrm{P}^2 n}$ ist ein komplexes Vektorbündel. Schließlich gilt

$$\tau_{\mathbb{R}\mathbb{C}} \cong \tau \oplus \tau^*.$$

Nach Satz 3.2 gilt

$$\begin{aligned} c(\tau_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) &= c(\tau)c(\tau^*) = (1 - c_1(\eta))^{2n+1}(1 + c_1(\eta))^{2n+1} \\ &= (1 - c_1(\eta)^2)^{2n+1} \end{aligned}$$

Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$c_{2n}(\tau_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) = (-1)^n \binom{2n+1}{n} c_1(\eta)^{2n}.$$

Das Element $x = c_1(\eta)$ ist ein Generator des Polynomalgebras $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[x]/(x^{2n+1})$ und schließlich ist $c_{2n}(\tau_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) \neq 0$. $\square$

Literatur

[Bos23] Siegfried Bosch. *Algebra*. Springer, 2023. ISBN: 978-3-662-67464-2.

[MS74] John W. Milnor und James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.

[MT97] Ib Madsen und Jørgen Tornehave. *From Calculus to Cohomology*. Cambridge University Press, 1997. ISBN: 978-0-521-58956-8.

[Tu17] Loring W. Tu. *Differential Geometry*. Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-55084-8.