Prof. Dr. C.-F. Bödiger

deRham-Kohomologie

dienstags, 14:15 — 16:00, Seminarraum II der Physik, Nußallee 14-16, Raum 3.013

Begin: Dienstag, 28. Oktober 2025

Das Seminar kann leider erst zwei Wochen später als das Wintersemester beginnen.

Die deRham-Kohomologie $H_{dR}^k(M)$ ist eine Kohomologietheorie, die für glatte Mannigfaltigkeiten M definiert ist. Sie benutzt Funktionen und Differentialformen auf M und nicht singuläre Simplexes in M , um einen Kokettenkomplex

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^2(M) \longrightarrow \dots \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

aufzustellen, wobei $n = \dim(M)$. Der Ko-Randoperator

$$d = d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

ist die äußere Ableitung von Differentialformen. In kleinen Dimensionen ist d der Gradient, die Rotation bzw. die Divergenz, wie wir sie aus der Analysis kennen. Für eine offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist dies

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2(M) \rightarrow 0$$

und für eine offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ ist es

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3(M) \rightarrow 0$$

Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt bekanntlich geschlossen, wenn $d(\omega) = 0$ gilt; und sie heißt exakt, wenn $\omega = d(\omega')$ für eine Differentialform $\omega' \in \Omega^{k-1}(M)$ gilt. Da

$$d \circ d = 0$$

gilt, ist immer $\text{im}(d_{k-1}) \subset \ker(d_k)$. Die deRham-Kohomologie von M ist dann definiert als der Quotient aus den geschlossenen modulo den exakten Differentialformen:

$$H_{dR}^k(M) := \ker(d_k) / \text{im}(d_{k-1})$$

für $k = 0, 1, \dots, n = \dim(M)$.

Diese Theorie hat ihren Ursprung in der Analysis und behandelt das Dilemma daß nicht jede Funktion in mehreren Variablen eine Stammfunktion hat, wie wir das von der 1-dimensionalen Analysis gewohnt sind. Der tiefere Grund dafür ist die Topologie des Definitionsbereichs der Funktion. Dieser Zusammenhang zwischen Analysis und Topologie ist einer der historischen Ausgangspunkte für die gesamte Algebraische Topologie. Der Titel des Buches von Madsen & Tornehave, nach dem wir uns hauptsächlich richten werden, ist *From Calculus to Cohomology* und beschreibt diesen Zusammenhang ganz treffend; ein erster Titel dieses Buches war schlicht und sachlich *deRham Cohomology* gewesen. Sie liegt also im Zwischengebiet zwischen

Topologie und Analysis, und ist deshalb für die Differentialtopologie und Differentialgeometrie sehr wichtig. Die deRham-Theorie besitzt eine Variante für komplexe Mannigfaltigkeiten (Dolbeault-Kohomologie) und eine Variante für algebraische Varietäten (Hodge-Theorie).

Die deRham-Kohomologie ist eine Theorie mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, d.h. alle Kohomologiegruppen sind reelle Vektorräume. Dies macht die Theorie einfacher als die singuläre (Ko)homologietheorie, aber sie ignoriert dafür auch sogenannte Torsionsphänomene. Trotzdem werden wir in vielen Beispielen sehen, daß die deRham-Kohomologie ausreichend stark ist, um mit ihr erste Anwendungen zu beweisen, wie z.B. den Brouwer'schen Fixpunktsatz.

Zunächst bauen wir die Theorie auf, bis zu dem Satz

$$H_{dR}^k(M) \cong H^k(M; \mathbb{R}) \cong H^k(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_k(M; \mathbb{Z}), \mathbb{R}),$$

welcher die deRham-Kohomologie mit der singulären Kohomologie und Homologie mit reellen Koeffizienten verbindet. Wir wenden uns dann einigen Anwendungen zu; nach den Begriffen wie Abbildungsgrad und Verschlingungszahl beweisen wir die Sätze von Brouwer (Fixpunktsatz und Invarianz des Gebiets, Invarianz der Dimension) und die Jordan'schen Separationssätze, sowie den Satz von Poincare-Hopf über Vektorfelder.

Die weiteren Vorträge wenden sich fortgeschrittenen Themen zu. Dazu befassen wir uns zunächst mit (reellen und komplexen) Vektorbündeln und ihren Schnitten, sowie ihren äußeren Produkten. über den Begriff eines Zusammenhangs in einem Vektorbündel kommen wir mit dem Begriff der invarianten Polynome für ein komplexes Vektorbündel ξ über M zu ganz gewissen Kohomologieklassen $c_i(\xi) \in H_{dR}^{2i}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ in der komplexifizierten deRham-Kohomologie, den sogenannten Chern-Klassen. Eine besondere charakteristische Klasse ist die Euler-Klasse; integriert man eine sie repräsentierende Differentialform über ganz M , so erhält man die Euler-Charakteristik.

Nach einigen Berechnung mit projektiver Bündeln werden wir zum Schluß noch die Gauß-Bonnet-Formel beweisen.

Bachelor and Master: This program is written in German, since the seminar was first planned as a bachelor seminar. It is now open for Master students, too, but they must take talks from (9) onwards. You can give your talk in German or in English.

Vorkenntnisse: Module 'Einführung in die Geometrie und Topologie' und 'Analysis III'.

Literatur: Für fast alle Vorträge kann man das Buch von Madsen & Tornehave [M-T] benutzen. Für einige Vorträge wird zusätzlich auf andere Lehrbücher verwiesen.

Die Vorträge sollen 90 Minuten dauern. Es muß Zeit für Fragen eingerechnet werden. Sie sollten sich so früh wie möglich mit mir besprechen, spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag.

Vorträge

- (1) **Mannigfaltigkeiten** 28.10.2025
Mannigfaltigkeiten, Koordinaten, Atlanten. Beispiele. Tangentialbündel. Beispiele. [M-T, 8, App. A].
- (2) **Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten** 4.11.2025
Funtionen, Vektorfelder, Differentialformen. Integration von Differentialformen. Äußere Algebra der Differentialformen. [M-T, 9 + 10], [B, V.1+2].

- (3) **deRham-Komplex und deRham-Kohomologie** 11.11.2025
 Kokettenkomplex der Differentialformen, äußere Ableitung, $d \circ d = 0$. Natürlichkeit. Homotopieinvarianz. Lemma von Poincare. [M-T, 3+6], [B, V.2].
- (4) **Mayer-Vietoris-Prinzip und der Satz von deRham** 18.11.2025
 Mayer-Vietoris-Sequenz. Isomorphismus mit der singulären Theorie $H_{dR}^k(M) \cong H^k(M; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_k(M; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$. Beweis mit Lemma 9.5 in [B]. [M-T, 5+6], [B, V.9].
- (5) **Anwendungen I** 25.11.2025
 [M-T, 11],
- (6) **Anwendungen II** 2.12..2025
 Satz von Poincare-Hopf, Betti-Zahlen, Euler-Charakteristik.
 [M-T, 12],
- (7) **Poincare-Dualität** 9.12.2025
 [M-T, 13].
- (8) **Produkt in der deRham-Kohomologie** 16.12.2025
 Äußere Algebra der Differentialformen, wedge-Produkt in der deRham-Kohomologie.
 Kohomologiering von CP^n . [M-T, 14], [B, V.10].
- (9) **Vektorbündel** 6.1. 2026
 [M-T, 16].
- (10) **Zusammenhänge in Vektorbündeln** 13.1.2026
 [M-T, 17].
- (11) **Invariante Polynome und charakteristische Klassen** 20.1.2026
 [M-T, 18, App. B].
- (12) **Euler-Klasse** 27.1.2026
 [M-T, 19].
- (13) **deRham-Kohomologie von projektiven Bündeln** 3.2.2026
 [M-T, 20], [B, V.10].
- (14) **Thom-Isomorphismus und Gauß-Bonnet-Formel** (10.2.2026)
 [M-T, 21].

LITERATUR

- [B-T] **R. Bott, L.W. Tu:** *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Math. vol. 82, Springer Verlag (1982).
- [B] **G.E. Bredon:** *Topology and Geometry.* Graduate Texts in Math. vol. 139, Springer Verlag (1993).
- [D] **J. Dupont:** *Curvature and Characteristic Classes.* Springer Lecture Notes in Mathematics.
- [G] **S. Goldberg:** *Curvature and Homolgy.* Academic Press (1962).
- [L] **W. Lück:** *Algebraische Topologie.* Vieweg Verlag (2005).
- [M-T] **I. Madsen, J. Tornehave** *From Calculus to Cohomology.* Cambridge University Press (1978)
-

Liste der Teilnehmer — Stand 27.7.2025

Finken, Tom
Fong, Chin Chung
Fromme, Jonas
Georgias, Jesse
Hummelsheim, Alma
Marttinen, Jussi
Moeselagen, Luis
Sprengard, Leo
Zafeiriou, Laios