Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Graduate Seminar on Topology

Master S4D2 Winter Term 2020/21

K-Theory

Tuesdays, 14:15 — 16:00 via Zoom. See my homepage for details.

Organisational Meeting was on Juli 15th, 2020. If you are interested in one of the remaining talks, please send an email to `cfb@math.uni-bonn.de`.

Topic

Die topologische K-Theorie ist eine verallgemeinerte Kohomologietheorie. Das heißt, es gibt eine Folge von Funktoren $K^n(-,-)$, definiert für Paare (X, A) von topologischen Räumen mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen, sodaß die Axiome von Eilenberg-Steenrod einer Kohomologietheorie (ohne Dimensionsaxiom) erfüllt sind. Sie war eine der ersten außergewöhnlichen Kohomologietheorien, die man nach der singulären Kohomologietheorie $H^n(X, A)$ gefunden hatte. Mit dieser Kohomologietheorie konnte man einige der schwierigsten geometrisch-topologischen Probleme lösen, wie zum Beispiel das Vektorfeldproblem für Sphären.

Das erste Ziel des Seminars ist die Definition der Gruppen $K^n(X, Y)$, und zunächst nur $K^0(X, A)$. Die Elemente von $K^0(X, Y)$ sind stabile Vektorraumbündeln über X, die über Y trivial sind. Für negative n kann man nun $K^n(X, Y) := K^0(\Sigma^{-n}X, \Sigma^{-n}A)$ setzen; für positive n braucht man zur Definition aber die berühmte Bott-Periodizität $K^0(X) \cong K^0(\Sigma^2 X)$. Dann werden wir zeigen, daß dies eine Kohomologietheorie ist, sehr verschieden von singulärer Kohomologie, denn wir haben haben $K^n(X) \cong K^{n+2}(X)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und damit auch Kohomologie in negativen Graden. Danach beschäftigen wir uns mit der multiplikativen Struktur, bevor wir schließlich wichtige Anwendungen zeigen.

Topological K-theory is a generalized cohomology theory. This means there is a family of contravariant functors $K^n(-,-)$, defined for all pairs (X, A) of spaces with values in the category of abelian groups such that the Eilenberg–Steenrod axioms for a cohomology theory (without dimension axiom) are satisfied. K-theory was the first cohomology theory discovered after singular cohomology was developed. With this new cohomology theory one could solve several classical problems in topology, for example the vector field problem on spheres.

The first goal of the seminar is to define the groups $K^n(X, Y)$, and we start with $K^0(X, A)$. The elements of this group are stable vector bundles on X which are trivial over Y. For negative n one simply sets $K^n(X, Y) := K^0(\Sigma^{-n}X, \Sigma^{-n}A)$; but for positive n we need for the definition the famous Bott periodicity $K^0(X) \cong K^0(\Sigma^2 X)$. Now we can show that we have a cohomology theory, very different from singular cohomology, since we have $K^n(X) \cong K^{n+2}(X)$ for all $n \in \mathbb{Z}$ and thus cohomology in negative degrees. We then study the multiplicative structure and finally show important applications.

Als Haupttext benutzen wir das Buch von M. Atiyah. Dieses Buch ist sehr elegant, aber vielleicht an vielen Stellen zu knapp geschrieben. Deshalb empfehlen wir, falls nötig, noch die Bücher von D. Husemoller, M. Karoubi, A. Hatcher und von K. Knapp.

Our main source is the book by M. Atiyah. This book may contain at some places not enough details. Therefore we also recommend the books by D. Husemoller, M. Karoubi, A. Hatcher and by K. Knapp.

Die Vorträge sind auf 90 Minuten angelegt, einschließlich Zeit für Fragen. Die Vorträge müssen mindestens 2 Wochen vor dem Vortragstermin fertig und mit mir durchgesprochen sein.

The talks are designed for 90 minutes, including time for questions. They should be discussed with me 2 weeks prior to the date of the talk.

Vorträge / Talks

(1) **Vektorbündel – grundlegende Definitionen** .... CFB 27.10.2020
[Atiyah, 1.1-1.2].

(2) **Vektorbündel über kompakten Räumen I** .... Ragna Oeynhausen 3.11.2020
[Atiyah, Seiten 10-20].

(3) **Vektorbündel über kompakten Räumen II** .... Ekin Ergen 10.11.2020
[Atiyah, Seiten 20-31].

(4) **Definition von $K^0(X,Y)$** .... Felix Zillinger 17.11.2020
[Atiyah, 2.1-2.2 Seite 46].

(5) **Bott-Periodizität I** .... Jordan Levin 24.11.2020
[Atiyah, 2.2, Seiten 46-55].

(6) **Bott-Periodizität II** .... Daniel Mulcahy 1.12.2020
[Atiyah, 2.2, Seiten 55-64].

(7) **Kohomologische Eigenschaften der K-Theorie** .... Jana Nickel 8.12.2020
[Atiyah, 2.4].

(8) **Beispiele von Berechnungen von $K^*(X)$** .... Christian Kremer 15.12.2020
[Atiyah, 2.5, 1.6, 2.3].

(9) **Multiplikation auf $K^*(X,Y)$** .... Eki Gonzalez Garcia 22.12.2020
[Atiyah, 2.6].

(10) **Der Thom-Isomorphismus** .... Dominik Kirstein 12.1.2021
[Atiyah, 2.7].

(11) **Äußere Potenzen und Adams-Operationen** .... Hasan Sami Tuna 19.1.2021
[Atiyah, Seiten 117-119, 135-136].

(12) **Hopf-Invariante und Divisionsalgebren** .... Isacco Nonino 26.1.2021

[Atiyah, Seiten 136-137], [Hatcher, Seiten 59-62], [Ebbinghaus, Teil B].

(13) **................** 2.2.2021

(14) **............** 9.2.2021

Literatur

[Atiyah] M. Atiyah: *K-Theory.* Benjamin Inc. (1967)

[Ebbinghaus] H.-D. Ebbinghaus et al.: *Zahlen.* Springer-Verlag (1983).

[Hatcher] A. Hatcher: *Vector Bundles and K-Theory.* Siehe http://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VBpage.html

[Husemoller] D. Husemoller: *Fibre Bundles.* McGraw-Hill (1966).

[Karoubi] M. Karoubi: *K-Theory.* Springer-Verlag (1978).

[Knapp] K. Knapp: *Vektorbündel.* Springer-Verlag (2013).