

Hauptseminar: Homologie- und Kohomologietheorien

Graduate Seminar in Topology

Bachelor S2D4 + Master S4D2

Sommersemester 2017

K-Theorie

Montags, 16:15 — 18:00 Uhr, Seminarraum 0.006

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Vorbesprechung war am: Dienstag, 7. Februar 2017, 14:15 - 15:00 Uhr, Hausdorff-Raum (MZ 1.012)

Die topologische K -Theorie ist eine verallgemeinerte Kohomologietheorie. Das heißt, es gibt eine Folge von Funktoren $K^n(-, -)$, definiert für Paare (X, A) von topologischen Räumen mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen, so daß die Axiome von Eilenberg-Steenrod einer Kohomologietheorie erfüllt sind. Sie war eine der ersten außergewöhnlichen Kohomologietheorien, die man nach der singulären Kohomologietheorie $H^n(X, A)$ gefunden hatte. Mit dieser Kohomologietheorie konnte man einige der schwierigsten geometrisch-topologischen Probleme lösen, wie zum Beispiel das Vektorfeldproblem für Sphären.

Das erste Ziel des Seminars ist es, die topologische K -Theorie, also zunächst die Gruppen $K^n(X, Y)$, zu definieren. Deren Elemente werden von Vektorraumbündeln über X repräsentiert, welche über Y trivial sind. Dann werden wir beweisen, dass diese Funktoren tatsächlich eine verallgemeinerte Kohomologietheorie bilden. Ein wichtiger Schritt dafür ist der Beweis der berühmten Bott-Periodizität $K^n(X) \cong K^{n+2}(X)$. Hinzu kommt noch eine multiplikative Struktur und damit der Thom-Isomorphismus.

Am Ende werden wir die Adams-Operationen und die Hopf-Invariante einführen, um damit eine berühmte Frage zu beantworten: Für welche n gibt es eine n -dimensionale reelle Divisionsalgebra? Ein Satz von Adams besagt, daß es nur folgende reelle Divisionsalgebren gibt: die reellen Zahlen \mathbb{R} selbst, die komplexen Zahlen \mathbb{C} , die Quaternionen \mathbb{H} und die Oktonionen \mathbb{O} .

Als Haupttext benutzen wir das Buch von M. Atiyah. Dieses Buch ist sehr elegant, aber vielleicht an vielen Stellen zu knapp geschrieben. Deshalb empfehlen wir, falls nötig, noch die Bücher von D. Husemoller, M. Karoubi, A. Hatcher und von K. Knapp.

Die Vorträge sind auf 90 Minuten angelegt: das heißt, man bereite ca. 80 Minuten vor und stelle sich auf viele Zwischenfragen ein. Die Vorträge müssen mindestens 2 Wochen vor dem Vortragstermin fertig und mit mir durchgesprochen sein.

Vorträge

- (1) **Vektorbündel - grundlegende Definitionen** T. BÜLLES (M) 24.04.2017
[Atiyah, 1.1 - 1.2].
- (2) **Vektorbündel über kompakten Räumen I** J.M. HERNANDEZ CACERES (M) 8.05.2017
[Atiyah, Seiten 10-20].
- (3) **Vektorbündel über kompakten Räumen II** D.L. HAMANN (M) 15.05.2017
[Atiyah, Seiten 20-31].
- (4) **Definition von $K^0(X, Y)$** B. KABASHAJ (M) 22.05.2017
[Atiyah, 2.1-2.2 Seite 46].
- (5) **Bott-Periodizität I** J. MENY (B) 29.05.2017
[Atiyah, 2.2, Seiten 46-55].
- (6) **Bott-Periodizität II** E. HAHN (B) 12.06.2017
[Atiyah, 2.2, Seiten 55-64].
- (7) **Kohomologische Eigenschaften der K -Theorie** T. WEHRHAN (B) **Mi 21.06.2017**
[Atiyah, 2.4].
- (8) **Beispiele von Berechnungen von $K^*(X)$** A. SELIMI (M) 26.06.2017
[Atiyah, 2.5, 1.6, 2.3].
- (9) **Multiplikation auf $K^*(X, Y)$** F. ZIEGER (B) 3.07.2017
[Atiyah, 2.6].
- (10) **Der Thom-Isomorphismus** A. RIEKERT (B) 10.07.2017
[Atiyah, 2.7].
- (11) **Äußere Potenzen und Adams-Operationen** F. KRANHOLD (M) 17.07.2017
[Atiyah, Seiten 117-119, 135-136].
- (12) **Hopf-Invariante und Divisionsalgebren** A. KIEFNER (M) 24.07.2017
[Atiyah, Seiten 136-137], [Hatcher, Seiten 59-62], [Ebbinghaus, Teil B].

Achtung: Der Termin 19.6. ist verlegt auf Mittwoch, 21.6.2017, 18-20 Uhr, Raum 0.006.

LITERATUR

- [Atiyah] M. Atiyah: *K-Theory*. Benjamin Inc. (1967)
[Ebbinghaus] H.-D. Ebbinghaus et al.: *Zahlen*. Springer-Verlag (1983).
[Hatcher] A. Hatcher: *Vector Bundles and K-Theory*. Siehe <http://www.math.cornell.edu/hatcher/VBKT/VBpage.html>
[Husemoller] D. Husemoller: *Fibre Bundles*. McGraw-Hill (1966).
[Karoubi] M. Karoubi: *K-Theory*. Springer-Verlag (1978).
[Knapp] K. Knapp: *Vektorbündel*. Springer-Verlag (2013).