Themen für Bachelorarbeiten SS 2021

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Note: Although the toics are described here in German, the bachelor thesis can be written in German or in English.

Mathematisches Institut
Universität Bonn
Endenicher Allee 60
D - 53115 Bonn
email: cfb@math.uni-bonn.de

1 James Model $J(X)$ für $\Omega\Sigma X$

Für einen zusammenhängenden Raum X ist der Schleifenraum $\Omega\Sigma X = \mathrm{map}(\mathbb{S}^1, X)_0$ seiner Einhängung offenbar von großer Bedeutung. Es gibt ein etwas 'kleineres' Model, sprich eine Homotopieäquivalenz $J(X) \longrightarrow \Omega\Sigma X$. Der Raum $J(X)$ besteht aus allen beliebig langen 'Worten' $x_1 x_2 \cdots x_n$ von Punkten aus X. Es gibt ein weiteres Model $C(\mathbb{R}; X) \longrightarrow \Omega\Sigma X$, die Konfigurationen von Punkten auf $\mathbb{R}$, also $\zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_n$, jeder mit einer Markierung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus X. Die Reihenfolge der x_i wird hier von der Anordnung der ζ_i übernommen. (Der Vorteil des zweiten Models ist, daß man es auf höhere Dimensionen zur Untersuchung von $\Omega^d\Sigma^d X$ verallgemeinern kann.) Es gibt eine offensichtliche Abbildung $p\colon C(\mathbb{R}; X) \to J(X)$, nämlich $p([\zeta_1, \ldots, \zeta_n; x_1, \ldots, x_n]) = x_1 x_2 \ldots x_n$.

Man weiß nun, dass p eine Homotopieäuivalenz ist; es wäre schön, ein Homotopieinverses zu kennen. **Aufgabe der Bachelorarbeit** ist es, einen Schnitt $S\colon J(X) \to C(\mathbb{R}; X)$ zu konstruieren, der homotopieinvers zu p ist, also $p \circ S = \mathrm{id}$ und $S \circ p \simeq \mathrm{id}$.
[Whi] und insbesondere [Ha] geben eine gute Erläuterung zu $J(X)$.

References

[Ha] A. Hatcher: *Algebraic Topology.* (Cambridge University Press 2002).

[Whi] G. W. Whitehead: *Elements of Homotopy Theory.* (Springer 1978)

2 Pseudo-Mannigfaltigkeiten

Ein simplizialer Komplex M heißt Pseudo-Mannigfaltigkeit der Dimension m, falls gilt:
(1) M die Vereinigung der m-Simplizes ist.
(2) Jeder (m-1)-Simplex liegt in genau zwei m-Simplizes.
Eng verwandt damit ist der Begriff der simplizialen Homologie-Mannigfaltigkeit der Dimension m: hier wird verlangt, dass die lokalen Homologiegruppen $H_m(M, M - x; \mathbb{Z})$ für alle $x \in M$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ sind. Siehe [Hau, S. 21+22] und [Spa, S.148+150] für Definitionen, aber auch [Mun, §63] für den Zusammenhang beider Begriffe. In den drei Büchern findet man eine Menge interessantes Material, teilweise als Übungsaufgaben, siehe [Spa, S. 206-208].
Entscheidend ist, daß es für eine Pseudo-Mannigfaltigkeit immer eine Fundamentalklasse $[u]$ gibt, und zwar ist $[u] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ im orientierbaren Fall und $[u] \in H_n(M; \mathbb{Z}/2)$ im nicht-orientierbaren (oder allgemeinen) Fall gibt.

Aufgabe der Bachelorarbeit ist es, für Pseudo-Mannigfaltigkeiten die Poincare-Dualität $H^k(M; \mathbb{G}) \cong H_{m-k}(M; \mathbb{G})$ zu beweisen, wobei $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ im orientierbaren Fall und $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2$ im nicht-orientierbaren Fall ist. Siehe etwa [Hau] oder [Mun].

References

[Hau] J.-Cl. Hausmann: *Mod two Homology and Cohomology.* (Springer Verlag 2014).

[Mun] J.R. Munkres: *Elements of Algebraic Topology.* (Addison Wessley Publ. Comp. 1984).

[Spa] E. Spanier: *Algebraic Topology.* (MacGraw Hill Book Comp. 1966).

3 Azyklische Träger

Eine Kettenabbildung $\phi\colon A_\bullet \to B_\bullet$ zwischen zwei Kettenkomplexen induziert einen Homomorphismus $\phi_* = H_n(\phi)\colon H_n(A_\bullet) \to H_n(B_\bullet)$ zwischen den Homologiegruppen. Sind zwei Kettenabbildungen ϕ und ψ kettenhomotop, so induzieren sie gleiche Homomorphismen $\phi_* = \psi_*$.
Es gibt eine Verallgemeinerung dieser Situation. Man definiert den Begriff eines *azyklischen Trägers* T für eine Kettenabbildung ϕ zwischen zwei freien Ketenkomplexen: jedem Basiselement $s \in A_n$ wird ein azyklischer Unterkomplex $T(s)$ von $B_\bullet$ zugeordnet mit $\phi(s) \in T(s)$ (und ein paar weiteren Eigenschaften). Dann kann man zeigen: zwei Kettenabbildungen mit einem gemeinsamen azyklischen Träger induzieren den gleichen Homomorphismus in der Homologie. Für die Definition siehe [Mun, Chap. 1, §13], [Mo-Ta, S.14+15] und [Hau, 2.9].
Aufgabe der Bachelorarbeit ist, diesen Satz zu beweisen und ein oder zwei Anwendungen, wie z.B. [Hau, 2.5.9] und [Mo-Ta, S. 15], auszuführen.

References

[Hau] J.-Cl. Hausmann: *Mod two Homology and Cohomology.* (Springer Verlag 2014).

[Mo-Ta] R.E. Mosher & M.C. Tangora: *Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory.* Harper and Row Publishers (1968).

[Mun] J.R. Munkres: *Elements of Algebraic Topology.* (Addison Wessley Publ. Comp. 1984).
