Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis
Übungsblatt 5

Abgabe: 19./20. November 2018 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1. Sei E/K eine endliche Körpererweiterung in Charakteristik 0. Zeige: es gibt nur endlich viele Zwischenkörper.
(*Hinweis:* Schreibe $E = K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und nutze aus, dass die Elemente a_i algebraisch sein müssen.)

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0. Die Lösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades über K lässt sich wie folgt auf die Lösung der allgemeinen Gleichungen zweiten und dritten Grades über einer geeigneten Erweiterung $K(u)$ zurückführen. Nach geeigneter Substitution dürfen wir annehmen, dass der kubische Koeffizient verschwindet und die Gleichung normiert ist; wir suchen also nach Lösungen der Gleichung

$$x^4 + ax^2 = bx + c. \tag{1}$$

(a) Betrachte zunächst das quadratische Polynom $Q(x) = Ax^2 + 2Bx + C$. Zeige: das Polynom $Q(x)$ ist von der Form

$$Q(x) = \pm(\alpha x + \beta)^2 \tag{2}$$

für geeignete α, β genau dann, wenn $AC - B^2 = 0$ gilt. Bestimme das Vorzeichen auf der rechten Seite von (2) in Abhängigkeit von A, B, C.

(b) Schreibe durch Einführen einer Zahl u die Gleichung (1) in der Form

$$(x^2 + a + u)^2 = bx + c + \ldots$$

für geeignete Terme auf der rechten Seite, die dann ein quadratisches Polynom $Ax^2 + 2Bx + C$ bilden. Wähle u so, dass die rechte Seite zu $\pm(\alpha x+\beta)^2$ umgeformt werden kann; dies führt zu einer Gleichung dritten Grades in u, die bestimmt, aber nicht explizit gelöst werden muss.

Die resultierende Gleichung

$$(x^2 + a + u)^2 = \pm(\alpha x + \beta)^2$$

kann schließlich mithilfe der Lösungsformeln für quadratische Gleichungen gelöst werden und liefert alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung (1).