Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis
Übungsblatt 12

Abgabe: 21./22. Januar 2019 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1. Berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

unter Ausnutzung der Fourierreihe von $f(x) = e^x$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Zur Vereinfachung der auftretenden Ausdrücke darf ohne Beweis die Identität

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

verwendet werden.

Aufgabe 2. Zeige: haben zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ identische Fourierreihen, so sind f und g identisch.

Aufgabe 3. Begründe, warum die Fourierreihe von $f(x) = x$ auf $[-\pi, \pi]$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4. Es sei eine Folge von Funktionen $f_j \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ gegeben, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Folgt daraus, dass die Folge

$$\int_{\mathbb{R}} f_j \mathrm{d}x$$

gegen 0 konvergiert? Was, wenn $\mathbb{R}$ durch ein kompaktes Intervall $[a, b]$ ersetzt wird?

Aufgabe 5. Untersuche die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf unendliche Differenzierbarkeit im Punkte $x = 0$.