Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Andrey Soldatenkov SS 2018

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 4

Aufgabe 22. (Standardintegrale, 3 Punkte)
Gegeben seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ mit $|z_0 - z_1| \neq r$. Man berechne das Integral

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{(z-z_1)^n} dz.$$

Wie üblich wird hierbei $\partial B_r(z_0)$ als Bild der Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{it}$ betrachtet. Hinweis: Die direkte Berechnung des Integrals für $z_0 \neq z_1$ is kompliziert. Man verwende stattdessen das Lemma von Goursat.

Aufgabe 23. (Standardintegrale, Variante, 2 Punkte)
Gegeben seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $|z_0| < r < |z_1|$. Man zeige, dass

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)} dz = \frac{2\pi i}{z_0 - z_1}.$$

Aufgabe 24. (Stokesscher Integralsatz, Beispiel, 3 Punkte)
Sei $f\colon U \to \mathbb{C}^*$ stetig und holomorph und $\gamma\colon [a, b] \to U \subset \mathbb{C}$ ein Weg. Man beweise die Formel

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz\right) = \frac{f(\gamma(b))}{f(\gamma(a))}. \tag{1}$$

Hinweis: Man betrachte die Funktion $u(t) = \exp\left(-\int_a^t \frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))}\gamma'(s)ds\right) f(\gamma(t))$.

Man schreibt (1) einprägsamer auch als $\int_\gamma d\log(f) = \log f(\gamma(b)) - \log f(\gamma(a))$. Warum?

Aufgabe 25. (Integration bzgl. dx und $d\bar{z}$, Beispiel, 1+1+1 Punkte)
Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und f eine auf dem Bild von γ stetige Funktion. Man beweise die Gleichungen

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma f dx + i \int_\gamma f dy, \quad \overline{\int_\gamma f dz} = \int_\gamma \bar{f} d\bar{z} \text{ und } \int_\gamma f dx = \frac{1}{2}\left(\int_\gamma f dz + \int_\gamma f d\bar{z}\right).$$

Aufgabe 26. (Länge von Wegen, 2+2 Punkte)
Man veranschauliche sich folgende Wege und berechne ihre Längen $L(\gamma)$:
(i) $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t + i\cosh(t)$ ("Kettenlinie")
(ii) $\gamma\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\frac{2i}{\pi}t^2}$

Aufgabe 27. (Integral einer reellen Funktion, 3 Punkte)
Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 1\}$. Man berechne

$$\int_{\partial U} \mathrm{Im}(z) dz.$$

Abgabe: Freitag 11.5. vor(!) der Vorlesung.