Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Andrey Soldatenkov SS 2018

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 2

Aufgabe 8. (Exponentialfunktion unter Konjugation, 2+1+1 Punkte)
Man beweise, dass $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$, $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$, and $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 9. (Abschluss, Inneres, Rand, 1+1+1+1+1 Punkte)
Man beschreibe Abschluss, Inneres und Rand der folgenden Mengen:
(i) $D_1(0) \setminus \{0\}$, (ii) $\mathbb{H}$, (iii) $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\}$, (iv) $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(0)$, wobei p ein Polynom ist, und (v) $\{p + iq \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$. Insbesondere entscheide man welche dieser Mengen offen bzw. abgeschlossen sind.

Aufgabe 10. (Cauchy–Riemann Differentialoperatoren, 3+1+1 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f = (u, v) \colon U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

1. Sei f differenzierbar in $z_0 \in U$. Man beweise, dass dann für die Ableitung $Df(z_0) \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und beliebige $h \in \mathbb{C}$ die folgende Gleichung gilt
$$Df(z_0)\, h = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\, \bar{h}.$$
2. Sei f holomorph in z_0. Man beweise die Formel $\det(Df(z_0)) = |f'(z_0)|^2$.
3. Sei wiederum f holomorph in z_0. Man beweise, dass $f'(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0)$.

Aufgabe 11. (Real- und Imaginärteil, Polarkoordinaten, 1+1+1+1+1+1+1 Punkte)
Man bestimme Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:
(i) $(i + 1)(i - 2)(i + 3)$, (ii) $\frac{2+i}{2-i}$, (iii) $(1 + i)^{-1}$ (iv) $-5i$.
Man bestimme Argument und Absolutbetrag folgender komplexer Zahlen:
(i) $1 + i$, (ii) -3, (iii) $4i$,

Aufgabe 12. (Konvergenzradius, 2+3 Punkte)
Sei $\sum a_n z^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R. Man zeige, dass dann R auch Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum n a_n z^n$ und $\sum n a_n z^{n-1}$ ist.
Seien $\sum a_n z^n$ und $\sum a'_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien R und R'. Was lässt sich über den Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum (a_n + a'_n) z^n$ und $\sum (a_n a'_n) z^n$ aussagen?

Aufgabe 13. (Bernoulli Zahlen, 2+2+2 Punkte)
Die Bernoulli Zahlen B_n, $n \geq 0$ sind durch die Gleichung
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$
definiert.

Abgabe: Freitag 27.4. vor(!) der Vorlesung.

1. Man beweise $B_{2k+1} = 0$ für alle $k > 0$. (Hinweis: Man betrachte die Funktion $z/(e^z - 1) + (z/2)$ und verwende, dass die ungeraden Koeffizienten einer geraden Potenzreihe verschwinden.)

2. Man zeige, dass für alle $n > 1$ gilt:

$$\frac{B_0}{n!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = 0.$$

3. Man berechne B_n, für $n = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 14. (Lokale Injektivität, 3 Punkte)
Sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, so dass $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Man zeige, dass dann für alle $z \in U$ eine offene Menge $z \in V \subset U$ existiert, so dass $f(z') \neq f(z'')$ für alle $z' \neq z'' \in V$.