Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

1. Übungsblatt, *20. Oktober 2008*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

1 Zeigen Sie für Aussagen A, B, C folgende Schlussregeln

a) $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$, der direkte Beweis;

b) $((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$, der indirekte Beweis;

c) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ Kettenschluss;

d) $((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$. *(je 5 Punkte)*

2 Bestimmen Sie die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, wobei

a) $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$;

b) $A = \{x \mid x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$. *(je 5 Punkte)*

3 Es seien A, B, C und D Mengen. Zeigen Sie

a) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$;

b) $A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$;

c) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$. *(je 5 Punkte)*

4 Zeigen Sie, dass

a) die Menge ganzer Zahlen $\mathbb{Z}$

b) die Menge positiver rationaler Zahlen $\mathbb{Q}^+$

abzählbar sind. *(je 15 Punkte)*

5 Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(A_n)$ von A_n und beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion. *(25 Punkte)*

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

2. Übungsblatt, *27. Oktober 2008*

1 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt:

a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. *(je 5 Punkte)*

2 Es seien $x_k > 0$ reelle Zahlen für alle $k = 1, \ldots, n$ mit $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Zeigen Sie

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$$

und ferner

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n) \Leftrightarrow (\forall\, k = 1, \ldots, n : \quad x_k = 1).$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Aussage, dass folgende Beziehung zwischen dem harmonischen, dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel gilt:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{1}$$

(40 Punkte)

3 Zeigen Sie, dass für alle $n > 1$ folgende Ungleichungen gelten:

a) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ die Fakultät von n ist;

b) $(n!)^2 < \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$;

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. *(je 5 Punkte)*

Tipp zu a) und b): Benutzen Sie die zweite Ungleichung aus (1).

4 Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \left\{ \frac{m}{n} \mid 0 < m < n, \text{ wobei } m \text{ und } n \text{ natürliche teilerfremde Zahlen} \right\}$$

kein Minimum und kein Maximum besitzt. Bestimmen Sie das Infimum $\inf(M)$ und das Supremum $\sup(M)$ von M. *(15 Punkte)*

5 Für $m, n \in \mathbb{N}$ seien M eine m-elementige und N eine n-elementige Menge.

a) Zeigen Sie, dass es n^m Abbildungen von M nach N gibt.

b) Es sei $m \leq n$. Zeigen Sie, dass es $\frac{n!}{(n-m)!}$ injektive Abbildungen von M nach N gibt.

(je 10 Punkte)

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir folgende Behauptung beweisen:

Alle Autos haben die gleiche Farbe.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ in einer Menge von n Autos alle die gleiche Farbe haben.

Induktionsanfang $n = 1$: Die Aussage ist offenbar richtig.

Induktionsschritt $n \to n + 1$: Wir betrachten eine Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ von $n+1$ Autos. Nehmen wir Auto a_1 heraus, so bekommen wir eine Menge $M_1 = \{a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ von n Autos, die nach Induktionsannahme alle die gleiche Farbe haben. Nehmen wir stattdessen Auto a_{n+1} aus der Menge M heraus, so bekommen wir die Menge $M_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von n Autos, die wiederum nach Induktionsannahme alle die gleiche Farbe haben. Also haben alle Autos $a_1, \ldots, a_{n+1}$ die gleiche Farbe.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben damit gezeigt, dass alle Autos die gleiche Farbe haben.

Wo steckt der Fehler in dieser Argumentation?

P2 Es sei

$$M = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m^2} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bestimmen Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum falls sie existieren.

P3 Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Es seien A und B Teilmengen von X. Zeigen Sie

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

P4 Für alle $1 \leq k \leq n$ seien $0 \leq x_k \leq \pi$. Zeigen Sie

$$\left| \sin\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \Big) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin(x_k).$$

Tipp: Verwenden Sie die Sinus-Summationsformel:

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

die Dreiecksungleichung und die Tatsache, dass $|\cos(x)| \leq 1$.

P5 Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

a) $n^{n+1} > (n+1)^n$, für $n \geq 3$;

b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, für $n > 1$.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

3. Übungsblatt, *3. November 2008*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

---

1 Es seien X und Y nicht leere, beschränkte Mengen reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass

a) $\inf(X) + \inf(Y) = \inf\{x + y \mid x \in X,\, y \in Y\}$;

b) $\sup(X) \cdot \sup(Y) \leq \sup\{x \cdot y \mid x \in X,\, y \in Y\}$. *(je 10 Punkte)*

Geben Sie möglichst allgemeine zusätzliche Voraussetzungen an Mengen X und Y, so dass in b) stehts die Gleichheit gilt. *(5 Punkte)*

2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}$ von

a) $|x| + |x - 1| + |x - 2| + 2\frac{1}{2} = 0$;

b) $|5x + 3| - |3x - 2| \geq 5$;

c) $\frac{1}{x + |x-1|} < 3$.

Geben Sie Infimum und Supremum sowie Minimum und Maximum von L an, insofern diese existieren. *(je 5 Punkte)*

3 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.
• Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Körperaxiome, dass es zu jedem $a \in K$ genau ein Inverses $-a$ der Addition gibt. *(4 Punkte)*
• Beweisen Sie nur mit Axiomen (K2)–(K5), dass Folgendes gilt

a) $\forall\, a \in K \setminus \{0\} \colon a^{-1} \cdot a = 1$;

b) $\forall\, a \in K \setminus \{0\} \colon 1 \cdot a = a$;

c) Es gibt nur ein neutrales Element der Multiplikation. *(je 7 Punkte)*

4 Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

a) $\forall\, a > 1 \Rightarrow a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \ldots > 1$;

b) $\forall\, a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \ldots < 1$. *(je 10 Punkte)*

5 Es sei $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie mit den Rechenregeln für Körper und den Anordnungsaxiomen (A1) und (A2), dass

$$\forall\, a, b \in K \colon a > b > 0 \Rightarrow a^{-1} < b^{-1}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$ *(15 Punkte)*

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Es sei $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper.
Zeigen Sie, dass für alle x, $y \in K$ Folgendes gilt:

a) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$;

b) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} < \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$;

c) $\big|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\big| \leq \sqrt{\big||x| - |y|\big|}$.

P2 Beweisen Sie den *Binomischen Lehrsatz.*
Es sei $x, y \in K$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Zeigen Sie zunächst, dass Folgendes gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

P3 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ mit

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}, \quad \bar{1} + \bar{1} = \bar{0};$$
$$\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1};$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist.
Verallgemeinerung auf $\mathbb{F}_p$, wobei p eine Primzahl ist.

P4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}$ von

a) $|x + 1| < 20$;

b) $|x| > |x + 1|$;

c) $\big||x + 1| - |x - 1|\big| < 1$.

P5 Entscheiden Sie ob Infimum, Supremum bzw. Minimum, Maximum folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$ existieren:

a) $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x^2 - 1| \leq 2\}$;

b) $Y = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x^2 - 1| \leq 2\}$;

c) $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leq 2\}$.

Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

4. Übungsblatt, *10. November 2008*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

---

1 Zeigen Sie, dass zwischen beliebigen rationalen Zahlen a und b mit $a < b$ unendlich viele irrationale Zahlen gibt. *(10 Punkte)*

2

a) Es sei r eine rationale Zahl und $x \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl. Zeigen Sie, dass $x + r$ und $x \cdot r$, mit $r \neq 0$ irrational sind.

b) Es sei $M \not\subset \mathbb{R}$ eine nicht leere, endliche oder abzählbare Menge. Beweisen Sie, dass es auf der Menge $M \cup \mathbb{R}$ keine Körperaxiome erfüllende Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ gibt, die eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ die übliche Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ ergeben. Geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(je 15 Punkte)

Bemerkung: Die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist z.B. kein Körper.

3 Zeigen Sie, dass $\sqrt[k]{n}$ für $k, n \in \mathbb{N}$ entweder eine ganze oder eine irrationale Zahl ist. Sie dürfen dabei die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ganzer Zahlen voraussetzen.

(10 Punkte)

4 Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Formen $x + iy$

a) $\left(\frac{4+6i}{1-2i} + \frac{2i}{3+i}\right)^{-1}$;

b) $(1 + i\sqrt{3})^{1155}$;

c) $\sqrt{i}$. *(je 10 Punkte)*

5 Zeichnen Sie folgende Mengen:

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = \mathrm{Re}(z) + 1\}$;

b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1,\ \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. *(je 5 Punkte)*

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Es sei ε eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

P2 Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Für alle $a,\, b \in \mathbb{R}^+$ und alle $r,\, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r, \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s};$$

b) Es sei $r \in \mathbb{Q}$.

i) $r > 0 \Rightarrow (\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^+ : \quad x < y \Rightarrow x^r < y^r);$
ii) $r < 0 \Rightarrow (\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^+ : \quad x < y \Rightarrow y^r < x^r);$

c) Für alle $r,\, s \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$ gilt:

i) $a^r < a^s$, für $a > 0$;
ii) $a^s < a^r$, für $a < 0$;

d) Für jedes kompakte Intervall $J \subset \mathbb{R}$ existiert $C > 0$ mit

$$\forall\, r,\, s \in J \cap \mathbb{Q} : \quad |a^r - a^s| < C|r - s|.$$

Tipp: Benutzen Sie die zweite Ungleichung aus (1) auf dem 2. Übungsblatt

P3 Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$
a) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$; b) $\frac{1}{i}$; c) $\frac{1}{1+i}$; d) $\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

P4 Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen in $\mathbb{C}$:

a) $z^4 - 1 = 0$;

b) $z^3 + 1 + i\sqrt{3} = 0$.

P5 Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| = |b|$. Zeichen Sie Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid (z^2 - a^2)(z^2 - b^2) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass für die Ecken z_1, z_2, z_3, z_4 von M Folgendes gilt $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ und

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

5. Übungsblatt, *17. November 2008*

---

1 Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$. *(je 10 Punkte)*

2 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

a) $a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$;

b) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$. *(je 15 Punkte)*

3 Es sei $x > 0$ eine reelle Zahl und Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = x + \frac{1}{a_n}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
Bemerkung: Für $x = 1$ ist der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ goldener Schnitt. *(20 Punkte)*

4 Es seien a und b positive reelle Zahlen. Überprüfen Sie die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, wobei

$$x_n = (a^n + b^n)^{1/n},$$

und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. *(10 Punkte)*

5 Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$s_n := \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \cdot z_k.$$

a) Folgt aus der Konvergenz von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Folgt aus der Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? *(je 15 Punkte)*

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, wobei $a > 1$;

d) $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$, wenn $|q| < 1$.

P2 Tipps zu Aufgabe 1 b):

- Es sei $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

- Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt: $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.

P3 Überprüfen Sie folgende Aussagen:

a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so liegen in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Falls in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

P4 Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge;
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, d.h., $\exists\, C > 0, \forall n \in \mathbb{N}$: $|b_n| < C$.

Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

P5 Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Beweisen Sie

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;

b) Es sei $b \neq 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

1 Es sei $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir bilden die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{a_n + 1}.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *(20 Punkte)*

Tipp: Benutzen Sie folgende Argumentationskette:

- $1 + \frac{x}{1+x} < a$ für alle $0 < x < a$;
- $1 < a_n < a$ für alle $n \geq 2$;
- $a_n < a_{n+1}$ für $n \geq 1$.

2 Es seien a und b positive reelle Zahlen. Wir bilden die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Zeigen Sie, dass die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert haben. *(20 Punkte)*

Tipp: Zeigen Sie, dass $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$.

3 Zeigen Sie, dass Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ die gleichen Häufungspunkte haben. *(20 Punkte)*

4 Konstruieren Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$,

a) die keine endliche Häufungspunkte hat;

b) die nur einen endlichen Häufungspunkt hat, jedoch nicht konvergent ist;

c) die unendlich viele Häufungspunkte hat;

d) die als Häufungspunkt jede reelle Zahl hat. *(je 5 Punkte)*

5 Es sei Folge positiver reeller Zahlen wie folgt definiert: Es seien zwei aufeinander folgende Folgenglieder gegeben. Dann ist das nächste Folgenglied im Produkt mit dem ersten das zweite Glied, das ums Eins erhöht wurde, d.h., $x_{n+2} \cdot x_n = x_{n+1} + 1$. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Häufungspunkte dieser Folge. *(20 Punkte)*

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Bestimmen Sie die Häufungspunkte von

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \ldots$$

P2 Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

P3 Es sei

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

a) $0 < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}$.

Leiten Sie damit folgende Formel her

$$\mathrm{e} = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}, \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{2}$$

P4 Beweisen Sie, dass Folgendes gilt:

a) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ hat ein Maximum, oder ein Minimum, oder beides;

b) eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen $+\infty$ bestimmt divergiert, hat ein Minimum.

Konstruieren Sie zugehörige Beispiele.

P5 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, für die a_n größer als alle folgenden Folgenglieder $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ ist.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

7. Übungsblatt, *1. Dezember 2008*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

---

1 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist von *beschränkter Variation*, wenn eine positive reelle Zahl C existiert, so dass für alle $n \geq 2$ Folgendes gilt:

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C.$$

Zeigen Sie, dass eine Folge von beschränkter Variation eine Cauchyfolge ist. Konstruieren Sie eine Cauchyfolge, die nicht von endlicher Variation ist. *(22 Punkte)*

Tipp: Betrachten Sie die Folge $y_n = |x_1 - x_2| + \ldots + |x_{n-1} - x_n|$.

2 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ existiert. *(22 Punkte)*

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\inf\{\frac{x_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert. Folgern Sie dann aus $\frac{x_m}{m} - \alpha < \frac{\epsilon}{2}$, dass $\frac{x_{qm+r}}{qm+r} - \alpha < \epsilon$ für hinreichend große q.

3 Für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n der Nachkommaanteil von $(3+\sqrt{7})^n$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Tipp: Verwenden Sie die Folge $(3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n$. *(22 Punkte)*

4 Bestimmen Sie $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sowie $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

a) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$;

b) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$;

c) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$. *(je 8 Punkte)*

5 Es sei $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n} = 1.$$

Zeigen Sie, dass (x_n) konvergiert. *(10 Punkte)*

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge in $\mathbb{C}$. Welche Konvergenzaussagen könnnen Sie über folgende Folgen treffen:

a) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

b) $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Konstruieren Sie entsprechene Beispiele.

P2 Bestimmen Sie $\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sowie $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

a) $x_n = (-1)^n n$;

b) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\binom{n}{2}}$.

P3 Zeigen Sie, dass $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist.

P4 Bestimmen Sie das maximale Folgenglied von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

a) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$;

b) $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

P5 a) Es seien $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die Einheitssphäre im dreidimensionalen Euklidischen Raum und $N = (0, 0, 1)$. Die *stereographische Projektion* $f\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$, mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{x_1}{x_3 - 1}, \frac{x_2}{x_3 - 1}\Big),$$

wobei wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von f.

b) Es seien $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 < 1\}$ die Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die *Cayley-Transformation*

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

H auf D abbildet. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von f.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

8. Übungsblatt, *8. Dezember 2008*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

1 Zeien Sie, dass Folgendes gilt:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$. *(je 12 Punkte)*

2 Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$. *(je 12 Punkte)*

3 Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl, deren Dezimalbruchdarstellung periodisch wird, rational ist. *(12 Punkte)*

4 Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergent sind

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$. *(11+6+6 Punkte)*

5 Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$. *(6+11 Punkte)*

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Es sei $s \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{für} \quad \begin{cases} s > 1 \text{ konvergiert;} \\ s \leq 1 \text{ divergiert.} \end{cases}$$

P2 Es sei $A_0, A_1 \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ quadratische 4×4 Matrix von der folgenden Form

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\exp(A_i) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_i^n}{n!}$ für $i = 0, 1$.

P3 Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ mit } a_n \geq 0 \quad \text{konvergiert} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad \text{konvergiert.}$$

Zeigen Sie, dass die Umkehrung falsch ist.

P4 Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+1}$, wobei $i^2 = -1$.

P5 Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{3}$$

mit $a_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ist Reihe (3) konvergent? Betrachten Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}.$$

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

9. Übungsblatt, *15. Dezember 2008*

1 Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} 2^{-n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)(n-2)}{n^2(n+2)}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$. *(je 8 Punkte)*

2 Es seien m eine natürliche Zahl und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass der Grenzwert s von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ unter Umordnung $\sigma_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $|\sigma(n) - n| \leq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sich nicht ändert. *(15 Punkte)*

3 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. *(je 15 Punkte)*

4 Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Reihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]}$ für $|xy| < 1$, wobei $[r] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq r\}$ für $r \in \mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$. *(je 10 Punkte)*

Tipp zu b): Schreiben Sie die Partialsumme s_m als $\sum_{l=0}^{m} \sigma_l(m)$, wobei $\sigma_0(m) = \sum_{k=0}^{m} (-\frac{1}{2})^k$ und $\sigma_l(m) = 2\sum_{k=l}^{m} (\frac{-1}{2})^k$ für $l \neq 0$ auf.

5 Ordnen Sie die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ derart um, dass sie divergent wird.
Tipp: Betrachten Sie folgende Umordnung $(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \cdots$.
(11 Punkte)

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1.$$

Was kann man über das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen?
Betrachten Sie zum Beispiel folgende Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \Big)$$

P2 Beweisen Sie, dass das Produkt zweier konvergenter Reihen

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \text{ mit } \alpha > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}, \text{ mit } \beta > 0$$

eine konvergente Reihe ist, falls $\alpha + \beta > 1$ und eine divergierende Reihen ist, falls $\alpha + \beta < 1$.

P3 Es sei $s \in \mathbb{C}$. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n.$$

P4 überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n \cdot 2^n}{3^n}$;

c) $\sum_{n=1} \frac{n!}{n^n}$.

P5 Es sei $[\,\cdot\,]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion definiert durch $x \mapsto [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Diese Funktion heißt die *Gaußsche Klammer*.
Ist diese Funktion injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv? Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion im kartesischen Koordinatensystem auf.

1 Zeigen Sie, dass die Doppelreihe

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(m+in)^3}$$

konvergiert.

(20 Punkte)

2 Es seien α, β, γ komplexe Zahlen mit $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der *hypegeometrischen Reihe*

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3 + \cdots.$$

Diskutieren Sie die Ausnahmefälle in Abhängigkeit von α, β und γ.

(20 Punkte)

3 Man stelle die geometrische Reihe und die Binomialreihe mittels der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ dar.

(10 Punkte)

4 Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Reihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}}z^n$, wobei $a > 1$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+n^2)z^n$.

(je 10 Punkte)

5 Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$, wobei $\nu(n)$ die Zifferzahl von n ist.

(10 Punkte)

Tipp: Zeigen Sie, dass $\nu(n) = [\log(n)] + 1$ ist, wobei $[\,\cdot\,]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die Gaußsche Klammer ist.

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

Für $s \in \mathbb{C}$ ist $\binom{s}{n}$ definiert durch

$$\binom{s}{n} = \begin{cases} \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}, & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

P1 Es seien s und z komplexe Zahlen. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n = 1 + sz + \frac{s(s-1)}{2} z^2 + \cdots .$$

Diskutieren Sie die Ausnahmefälle in Abhängigkeit von s.

P2 Zeigen Sie, dass für alle komplexe s, t und $k \in \mathbb{N}_0$ Folgendes gilt

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{s}{j} \binom{t}{k-j} = \binom{s+t}{k}.$$

P3 Es seien $t, s, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Beweisen Sie das Additionstheorem für die Binomialreihe:

$$B_t(z) \cdot B_s(z) = B_{t+s}(z). \tag{4}$$

P4 Folgern Sie aus (4), dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und $-1 < x < 1$ Folgendes gilt

$$B_s(x) = (1+x)^s.$$

P5 Schreiben Sie die ersten drei Glieder der Binomialentwicklung (4) für $s = 1/2$ und $s = -1/2$ auf. Leiten Sie hiermit aus der Energie

$$E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)$$

eines mit Geschwindigkeit v bewegten Körpers mit Ruhemasse m_0 die Ruheenergie E_0 und die kinetische Energie E_{kin} der klassischen Mechanik her. Hierbei bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

11. Übungsblatt, *12. Januar 2009*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

1 Es sei $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn $\lim_{x\to 0} f(x)$ exitiert.

(25 Punkte)

2 Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^3 + x + 2 = \mathrm{e}^x$ mindestens eine positive und eine negative Lösung hat.

(20 Punkte)

3 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *antiperiodisch*, wenn ein $T > 0$ existiert, so dass für alle x

$$f(x+T) = -f(x).$$

Zeigen Sie, dass f eine *periodische* Funktion von der Periode $2T$ ist, d.h. $f(x+2T) = f(x)$.

(10 Punkte)

4 Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ einen Fixpunkt hat, d.h., es existiert $x_0 \in [a,b]$, so dass $f(x_0) = x_0$.

(25 Punkte)

5 Die Riemannsche Funktion ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } x = \frac{m}{n}, \text{ wobei } m \text{ und } n \text{ teilerfremde ganze Zahlen;} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f unstetig an alle rationalen und stetig an allen irrationalen Stellen ist.
Tipp: Benutzen Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit.

(20 Punkte)

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Untersuchen Sie folgende Funktion auf Stetigkeit

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto [x],$$

wobei $[\cdot]$ die Gaußsche Klammer ist.

P2 Es sei die Dirichlet-Funktion definiert durch

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational;} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{Q}$ folgendes gilt

$$\chi(x+q) = \chi(x).$$

Das heißt, χ ist eine periodische Funktion mit Periode $q \in \mathbb{Q}$.

P3 Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Funktion $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall unstetig ist.

P4 Zeigen Sie, dass die Funktion $]0,1[\ni x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht gleichmäßig stetig auf $]0,1[$ ist.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

12. Übungsblatt, *19. Januar 2009*

---

1 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/n}-1}{x}$, wobei $n \in \mathbb{Z}$. *(je 10 Punkte)*

2 Zeigen Sie, dass die Funktion $\sin(\frac{\pi}{x})$ auf $]0,1[$ stetig und beschränkt jedoch nicht gleichmäßig stetig ist.

(15 Punkte)

3 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die jeweilige Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Konvergieren die Funktionenfolgen gleichmäßig auf D?

a) $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$, $D = \mathbb{R}$;

b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$, $D = [0,1]$. *(je 10 Punkte)*

4 Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. *(je 15 Punkte)*

5 Es seien $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge monotoner Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)$ eine Reihe, die absolut konvergent in a und b ist. Zeigen Sie, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)$ absolut und gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$ ist.

(15 Punkte)

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

Präsenzaufgaben

Wiederholen Sie die Definition von Kosinus und Sinus aus der Schule.

P1 Es sei $\phi(x) = \cos(x) + i\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

a) $\phi(0) = 1$;

b) $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$;

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)-1}{x} = i$.

Es sei

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

die Exponentialfunktion.

P2 Beweisen Sie die *Eulersche Formel:*

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Folgern Sie daraus

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ix}), \qquad \sin(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ix}).$$

P3 Zeigen Sie, dass

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihen.

P4 Stellen Sie die Tangens- $\tan(z)$ und Kotangens-Funktion $\cot(z)$ mittels der Exponentialfunktion e^{iz}

P5 Diskutieren Sie die hyperbolische Funktionen $\cosh(z)$, $\sinh(z)$ sowie $\tanh(z)$, $\coth(z)$ und ihre Umkehrfunktionen.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

13. Übungsblatt, *26. Januar 2009*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

1 Beweisen Sie die Produktregel:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $h^{(0)} = h$ ist. *(20 Punkte)*

2 Für $n \in \mathbb{N}$ sei m die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n}{2}$. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ Folgendes gilt:

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-(2k+1)}(x) \cdot \sin^{2k+1}(x).$$

Tipp: Verwenden Sie die Exponentialfunktion. *(15 Punkte)*

3 Bestimmen Sie die Ableitung von $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, wobei

a) $f(x) = (x^x)^x$;

b) $f(x) = \log\log(1+x)$;

c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin\log(x)}$. *(je 10 Punkte)*

4 Es sei f eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass für natürliche n Folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)\Big) = f'(x).$$

Kann man umgekehrt aus der Existenz des obigen Grenzwertes die Differenziebarkeit der Funktion f folgern?

Tipp: Betrachten Sie die Dirichlet-Funktion χ, Präsenzaufgabe 11.2 *(15 Punkte)*

5 Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion definiert durch

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^n, & \text{für } x > 0; \\ 0, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist f differenzierbar im Punkt 0? *(20 Punkte)*

universitätbonn

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*
Präsenzaufgaben

P1 Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der gebrochenrationalen Transformation

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

P2 Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = (\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}, \sin(\cos^2(\sin^3 4x^5)), \mathrm{e}^{4x^5})$$

P3 Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

a) $(a^x)' = a^x \log(a)$, $a > 0$;

b) $(\cosh x)' = \sinh x$;

c) $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$;

d) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

e) $(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

P4 Bestimmen Sie die Ableitung von

$$x \mapsto f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2+2}.$$

P5 Zeigen Sie, dass die Ableitung folgender Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \\ 0 & e^{x^2} \end{pmatrix}, & x \neq 0; \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x = 0, \end{cases}$$

nicht steig ist.

Übungen zur Vorlesung *Analysis I*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

14. Übungsblatt, *2. Februar 2009*

Präsenzaufgaben

P1 Bestimmen Sie die logarithmische Ableitung von

a) $f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

b) $f(x) = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

P2 Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = C_1 \cosh(x) + C_2 \sinh(x)$, wobei C_1, C_2 Konstanten sind, folgender Gleichung genügt:

$$f''(x) = f(x).$$

P3 *Methode der kleinsten Quadrate.*
Es seien $a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Gesucht ist $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} (a - a_i)^2$$

minimal wird.

P4 Zeigen Sie, dass alle Nullstellen eines Legendre-Polynoms $P_m(x) := \frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}$ reell sind und in $]-1,1[$ liegen.

P5 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$;

b) $\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$, wobei $a > 0$.

P6 Untersuchen Sie folgende Funktion auf Differenzierbarkeit in $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{für } x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

universitätbonn