Probeklausur zur Vorlesung *Analysis I*
Bonn, den *12. Februar 2009*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

Matrikelnummer:	Nummer der Übungsgruppe:

Informationen zur Probeklausur

- Zur Probeklausur sind *alle* zugelassen, die am Übungsbetrieb teilgenommen haben.
- Abgabe ist am *5. Januar* in der Vorlesungspause.
- Sie haben zum Bearbeiten *drei* Stunden Zeit.

Bitte lesen Sie die Aufgaben erst zu Beginn dieser drei Stunden durch.

- Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Vorlesungsmitschrifften, Taschenrechner, Notebooks oder Bücher sind *nicht* zugelassen.
- Schreiben Sie *leserlich* und verwenden Sie *keinen* Bleistift.
- Tragen Sie auf diesem Deckblatt Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe ein und heften Sie es vor der Abgabe mit Ihren Lösungsblättern zusammen.
- Tragen Sie *nicht* Ihren Namen auf die Zettel ein. Ihr Ergebnis bei dieser Klausur bleibt weitgehend anonym und die erreichten Punkte gehen *nicht* in die Bewertung der Übungsblätter ein.
- Bitte füllen Sie die Zeile *Bearbeitet* in folgender Tabelle aus:

Aufgabe	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	
Bearbeitet											Ja/Nein
maximale Punktezahl	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	$\Sigma = 100$
erreichte Punktezahl											$\Sigma =$
Korrektor											

Frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

universitätbonn

1 Geben Sie die Anordnungsaxiome für einen Körper an. Ist $\mathbb{C}$ ein Archmedischer Körper?

(10 Punkte)

2 Wann ist eine Abbildung injektiv und wann ist sie surjektiv?

(10 Punkte)

3 Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß?

(10 Punkte)

4 Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3n^2+2}x^n$.

(10 Punkte)

5 Bestimmen Sie den Grenzwert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

(10 Punkte)

6 Zeigen Sie, dass Folgendes gilt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, für $|x| < 1$.

(10 Punkte)

7 Für $s > 1$ sei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k) - 1) = 1.$$

(10 Punkte)

8 Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

(10 Punkte)

9 Für $z \in \mathbb{C}$ seien

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad c(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Beweisen Sie die absolute Konvergenz der Reihen und zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produkts $c(z)^2 + s(z)^2 = 1$. *(10 Punkte)*

10 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert a. Zeigen Sie die Konvergenz von

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j.$$

(10 Punkte)

1 Siehe z.B. Seite 19 im Skript *Infinitesimalrechnung I und II*.
Komplexe Zahlen bilden keinen geordneten Körper. In der Tat ist $i^2 = -1$, was im **Widerspruch zu** $x^2 > 0$ für alle Elemente $x \neq 0$ eines geordneten Körpers K steht.

2 Siehe Lehrbücher der Mathematik.

3 Siehe Satz 4.19 im Skript *Infinitesimalrechnung I und II*.

4 Wir benutzen das Quotientenkriterium

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n^2+2}{3n^2+6n+5}} = 1.$$

5 Mittels der **Partialbruchzerlegung** erhalten wir, dass $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

6 Weil die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$ **absolut konvergiert**, folgt aus dem Cauchyschen Produktsatz

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} x^i \cdot x^j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} x^{i+j} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

7 Wir halten fest, dass

$$\zeta(k) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Für $k > 1$ ist die obige Reihe **absolut konvergent**. Aus dem Doppelreihensatz folgt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \Big) \qquad \textit{geometrische Reihe!}$$

und damit unmittelbar

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Behauptung folgt aus Aufgabe 5.

8 Wir betrachten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Aus dem **Quotientenkriterium**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

folgt die Konvergenz dieser Reihe. **Notwendige Bedingung** für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, siehe Lemma 5.3 im Skript *Infinitesimalrechnung I und II*.

9 Mittels Quotientenkriteriums erhalten wir, dass $s(z)$ und $c(z)$ **absolut konvergente** Potenzreihen für alle $z \in \mathbb{C}$ sind. In der Tat ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Nach dem Cauchy-Produktsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} c^2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} (-1)^{i+j} \frac{z^{2i}}{(2i)!} \frac{z^{2j}}{(2j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \sum_{i+j=n} \frac{1}{(2i)!(2j)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\binom{2n}{2i} = \frac{(2n)!}{(2i)!(2(n-i))!}$.
Analoge Rechnung für $s(z)$ ergibt zunächst

$$s^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} (-1)^{i+j} \frac{z^{2i+1}}{(2i+1)!} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2(n+1)} \sum_{i+j=n} \frac{1}{(2i+1)!(2j+1)!}$$

und dann durch Umbenennung $m = n+1$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m}{2i+1}.$$

Aus

$$(1-1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2i+1}$$

folgt sofort die Behauptung.

10 Nach Voraussetzung ist (a_k) eine konvergente Folge mit $a_k \to a$. Das heißt, zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_j - a| < \epsilon$ für alle $j > N$. Für alle $n > N$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) + a \\ &\le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k - a| + a \\ &\le C \frac{N}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - a| + a, \end{aligned}$$

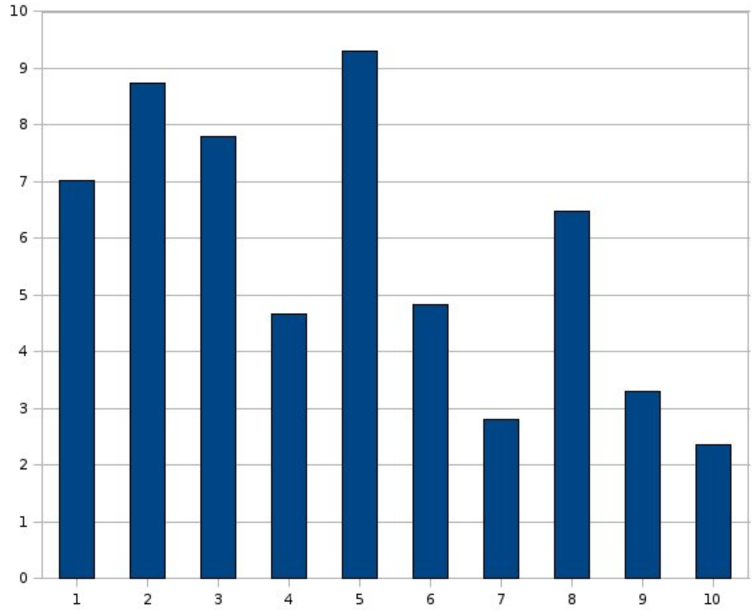
wobei $C = \max\{|a_k - a| \mid 1 \leq k \leq N\}$

$$\leq C\frac{N}{n} + \frac{n-N}{n}\epsilon + a.$$

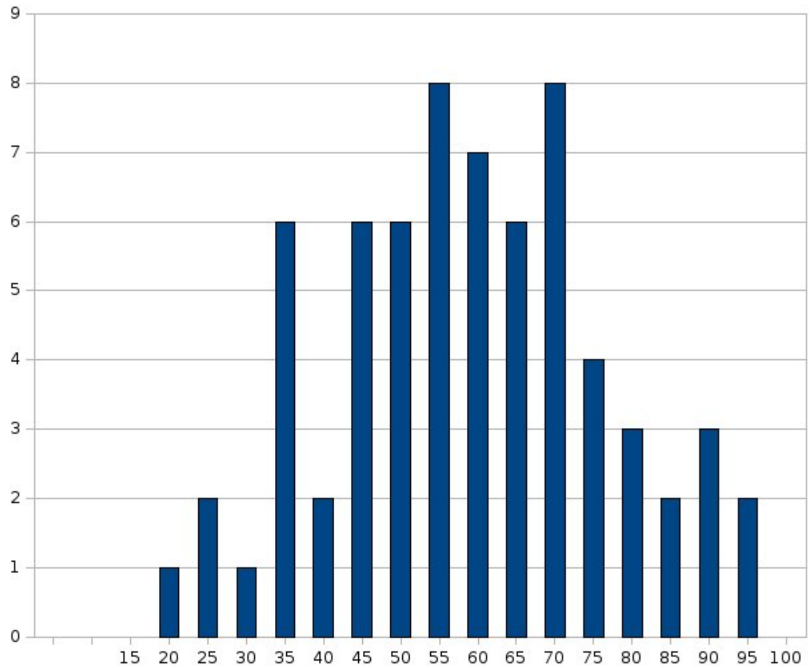
Also ist $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. *Siehe auch Aufgabe 5.5*

Auswertung der Probeklausur:

Es wurden 67 Probeklausuren korrigiert. Im Durchschnitt erreichte Punktzahl: ***57,36***.



Durchschnittliches Ergebnis bei den einzelnen Aufgaben



Histogramm der erreichten Punktzahlen