Nachklausur zur Vorlesung *Analysis I*
Bonn, den *26. März 2009*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. A. Wotzke

Nachname, Vorname:	**A**
Matrikelnummer:	Nummer der Übungsgruppe:

- Drehen Sie diesen Zettel bitte ***erst auf Aufforderung*** um.
- Zum Bearbeiten der Klausur haben Sie *180 Minuten*.
- Tragen Sie auf diesem Deckblatt Ihren Nach- und Vornamen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe ein.
- Geben Sie Ihre Rechenschritte möglichst ***ausführlich*** an.
- Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Vorlesungsmitschriften, Bücher sind *nicht* zugelassen.
- Technische Geräte wie Taschenrechner, Notebooks, Handys sind *nicht* zugelassen.
- Schreiben Sie *leserlich* und verwenden Sie *keinen* Bleistift oder Füller.
- Bitte füllen Sie die Zeile *Bearbeitet* in folgender Tabelle aus:

Aufgabe	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	
Bearbeitet											Ja/Nein
maximale Punktezahl	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	*10*	$\Sigma = 100$
erreichte Punktezahl											$\Sigma =$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur.

Bewertung:	
Bonn, den	

universitätbonn

1 Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.
Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit $\boldsymbol{W}$ und falsche Aussagen mit $\boldsymbol{F}$.

- ☐ Es sei (a_n) eine Nullfolge. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.
- ☐ Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ für alle Bijektionen σ von $\mathbb{N}$.
- ☐ Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann ist (a_n) eine Nullfolge.
- ☐ Es gelte $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- ☐ Es gelte $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *(je ±2 Punkte)*

Hinweis: Bei dieser Aufgabe können Sie maximal Zehn und minimal Null Punkte erreichen.

2 Was besagt der Satz von Maximum und Minimum? *(10 Punkte)*

3 Zeigen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen. *(10 Punkte)*

4 Es seien $f, g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ Funktionen. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

(10 Punkte)

5 Bestimmen Sie folgenden Grenzwert $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$. *(10 Punkte)*

6 Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n$, $p \in \mathbb{Q}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$. *(je 5 Punkte)*

7 Bestimmen Sie $\bar{z}$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Re}(1/z)$ und $\mathrm{Im}(1/z)$ für $z = \frac{12+5i}{2+3i}$. *(10 Punkte)*

8 Es sei $q > 0$ eine rationale Zahl. Zeigen Sie, dass für alle $c \geq 0$ die Gleichung $x^q = c$ eine *eindeutige* positive Lösung hat. *(10 Punkte)*

9 Zeigen Sie, dass die Gleichung $3\log(x) + \frac{1}{x} = 0$ auf $(0, \infty)$ zwei Nullstellen hat. *(10 Punkte)*

10 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist. *(10 Punkte)*