Lösungsvorschläge zu Übungsblatt 12

1 Lösen Sie analog zu Aufgabe 11.4 die Gleichung für den sog. *aperiodischen Grenzfall*, also

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \gamma^2 x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

Lösung. Sei $v = \binom{x}{x'}$. Zu lösen ist dann

$$v' = Av \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad v(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Das charakteristische Polynom $det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ von A ist $\lambda^2 + 2\gamma + \gamma^2 = (\lambda + \gamma)^2$ mit der Nullstelle zweiter Ordnung $-\gamma$. Damit lautet die Jordan-Normalform von A

$$A = BCB^{-1}, \quad C = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} = D + N, D = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind

$$B = \begin{pmatrix} -1/\gamma^2 & -1/\gamma^2 \\ -\gamma^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

(Dies kann man ähnlich dem Gauß-Verfahren durch elementare Zeilenumformungen von $A \rightsquigarrow C$ erhalten). Die Lösung von (1) ist dann

$$v(t) = e^{tA} v(0) = B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} C^k\Big) B^{-1} v(0) \tag{2}$$

Aber weil $N^2 = 0$ (N nilpotent), ist für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} C^k = (D+N)^k &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} D^{k-l} N^l = D^k + kD^{k-1}N \\ &= \begin{pmatrix} (-\gamma)^k & k(-\gamma)^{k-1} \\ 0 & (-\gamma)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weil ausserdem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k(-\gamma)^{k-1} = t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t\gamma)^{k-1}}{(k-1)!} = te^{-t\gamma}$$

folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} C^k = \begin{pmatrix} e^{-t\gamma} & te^{-t\gamma} \\ 0 & e^{-t\gamma} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

In (2):

$$e^{tA}v(0) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t}(1+\gamma t) & e^{-\gamma t}t \\ -e^{-\gamma t}\gamma^2 t & -e^{-\gamma t}(\gamma t - 1) \end{pmatrix} v(0) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t}tv_0 + e^{-\gamma t}(1+\gamma t)x_0 \\ -e^{-\gamma t}(-1+\gamma t)v_0 - e^{-\gamma t}\gamma^2 t x_0 \end{pmatrix}$$

Schließlich

$$x(t) = e^{-\gamma t}(x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t).$$

Bemerkung. Aus (3) wurde geschlossen, dass $\{e^t, te^{-t}\}$ eine Basis von Lösungen von (1) ist. Natürlich kann man dies allgemein aus der Form der Jordan'schen Normalform folgern (siehe Vorlesung). Dazu genügt es, das charakteristische Polynom zu kennen. Mit diesem Vorwissen kann dann eine Lösung von (1) durch den Ansatz $C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{\gamma t}$ bestimmt werden.

□

2

Variation der Konstanten. Seien y und b differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \qquad y(\tau) = \eta$$

durch

$$y(t) = e^{A(t-\tau)}\eta + \int_\tau^t e^{A(t-s)} b(s)\, ds \tag{4}$$

gelöst wird.

Bestimmen Sie damit die Lösung von

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \cos(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \tag{5}$$

Hinweis: An einer Stelle muss ein Term der Form $\frac{d}{dt}\int_a^t f(t,s)\, ds$ berechnet werden. Betrachten Sie dazu $\int_a^t f(t,s)\, ds = (g \circ \delta)(t)$ mit $g(x,y) = \int_a^x f(y,s)\, ds$ und $\delta(t) = (t,t)$ und verwenden Sie die Kettenregel. Außerdem können Sie annehmen, dass Integration und Differentiation vertauscht werden können.

Lösung. Zuerst zum Hinweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_a^t f(t,s)\, ds = \frac{d}{dt}(g \circ \delta)(t) &= dg(\delta(t)) \circ \underbrace{\delta'(t)}_{=(1,1)} = \partial_1 g(t,t) + \partial_2 g(t,t) \\ &= \frac{d}{dx}|_{x=t} \int_a^x f(t,s)\, ds + \int_a^t \partial_1 f(t,s)\, ds \\ &= f(t,t) + \int_a^t \partial_1 f(t,s)\, ds. \end{aligned}$$

Ableiten von (4) ergibt also

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= Ae^{A(t-\tau)}\eta + e^{A(t-t)}b(t) + \int_\tau^t Ae^{A(t-s)}b(s)\,ds \\
&= A\Big(e^{A(t-\tau)}\eta + \int_\tau^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds\Big) + b(t) = Ay(t) + b(t).
\end{aligned}
$$

Sei $y = \binom{x}{x'}$. Dann ist (5) äquivalent zu

$$
y'(t) = Ay(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}, y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Die Lösung gemäß (4) ist

$$
y(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(s) \end{pmatrix} ds \tag{6}
$$

Wie in Aufgabe 1 kann e^{At} berechnet werden:

$$
e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}(1+t) & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{pmatrix}
$$

In (6)

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t}(1+t) \\ -te^{-t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} (t-s)e^{-(t-s)}\cos(s) \\ e^{-(t-s)}(1-(t-s))\cos(s) \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t}(1+t) \\ -te^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{-t}t + \sin(t) \\ e^{-t}(-1+t+e^t\cos(t)) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Schließlich

$$
x(t) = e^{-t}(1 + \tfrac{t}{2}) + \tfrac{1}{2}\sin(t).
$$

□

3 **Trennung der Variablen.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$
y' = f(x)g(y), \quad y(\xi) = \eta \tag{7}
$$

für stetige reelle Funktionen f, g. Dabei sei g strikt positiv.

a) Zeigen Sie, dass eine Lösung $y = y(x)$ von (7) die Gleichung

$$
\int_\eta^y \frac{ds}{g(s)} = \int_\xi^x f(t)\,dt
$$

erfüllt.

b) Bestimmen Sie mit dieser Methode die Lösung von

$$y'(x) = e^{y(x)} \sin x, \qquad y(0) = \eta.$$

Zeigen Sie: Für $\eta = -\log 2$ existiert die Lösung in $(-\pi, \pi)$ und ist nicht darüber hinaus fortsetzbar. Für $\eta < -\log 2$ existiert die Lösung $y(x)$ in ganz $\mathbb{R}$ und ist beschränkt.

Lösung.

a) Sei

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

Integration beider Seiten von ξ bis x und Substitutionsregel:

$$\int_\xi^x f(t)\,dt = \int_\xi^x \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt = \int_{y(\xi)}^{y(x)} \frac{1}{g(s)}\,ds$$

b)

$$\begin{aligned} \int_\eta^y \frac{ds}{e^s} &= \int_0^x \sin(t)\,dt \\ e^{-\eta} - e^{-y} &= -\cos(x) + 1 \\ y(x) &= -\log\left(e^{-\eta} + \cos(x) - 1\right) \end{aligned}$$

Die weiteren Aussagen folgen aus $e^{-\eta} > 0$ und $|\cos(x)| \leq 1$. $\square$