Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung

2.7.2009

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wann heißt f differenzierbar in $a \in U$? Geben Sie zwei Definitionen an.

Aufgabe 2. Wo kann die Gleichung $x^3 = y^3$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) nach x aufgelöst werden, und wie lautet ggf. die Auflösung? Welches Ergebnis liefert der Lokale Umkehrsatz?

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Bestimmen Sie den Wahrheitsgehalt (W oder F) der folgenden Aussagen.

- [ ] f ist differenzierbar in $a \in U \iff x \mapsto df(x)(e_i)$ ist stetig in $a \in U$ für die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$.
- [ ] f ist stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ f ist stetig.
- [ ] Sei $m = 1$. Wenn f zweimal stetig differenzierbar in $a \in U$ ist, so ist die Hesse-Matrix von f bei a positiv definit.
- [ ] Hat eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ein lokales Maximum bei $a \in U$, so ist $df(a) = 0$.
- [ ] Eine kompakte Menge ist folgenkompakt.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie alle Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x - 2)e^{-x^2-y^2}$.

Aufgabe 5. Sei ℓ^2 die Menge aller Folgen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ komplexer Zahlen, so dass $\sum_i |\alpha_i|^2$ konvergiert. Durch $|\alpha| := \left(\sum_i |\alpha_i|^2\right)^{1/2}$ für $\alpha \in \ell^2$ wird $(\ell^2, |\cdot|)$ ein vollständiger normierter Raum. Zeigen Sie: Die Menge Q aller Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ mit $\forall k : |\alpha_k| \leq 1/k$ ist kompakt.

Aufgabe 6. Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx \quad , \qquad \int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x+1)(x-1)^2}\, dx \quad , \qquad \int e^x \sin x\, dx$$

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $x \mapsto \log \cos x$ bei $x = 1$ bis zum Term $(x - 1)^2$ und geben Sie das Restglied nach Lagrange an.

Aufgabe 8. Sei $\|.\|$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f : x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $df(a) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $a \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 9. Zeigen Sie: Die orthogonale Gruppe $O(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^t X = E\}$ ist eine $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$. *Hinweis: $X^t X$ ist symmetrisch.*

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $x''(t) - x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ durch Reduktion auf ein System erster Ordnung.