Übungen zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. W. Müller
Dr. J. Müller

12. Übungsblatt, *9. Juli 2009* universitätbonn

---

1 Lösen Sie analog zu Aufgabe 11.4 die Gleichung für den sog. *aperiodischen Grenzfall*, also

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \gamma^2 x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

2 **Variation der Konstanten.** Seien y und b differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \qquad y(\tau) = \eta$$

durch

$$y(t) = e^{A(t-\tau)}\eta + \int_\tau^t e^{A(t-s)} b(s)\, ds$$

gelöst wird.
Bestimmen Sie damit die Lösung von

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \cos(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Hinweis: An einer Stelle muss ein Term der Form $\frac{d}{dt}\int_a^t f(t,s)\, ds$ berechnet werden. Betrachten Sie dazu $\int_a^t f(t,s)\, ds = (g \circ \delta)(t)$ mit $g(x,y) = \int_a^x f(y,s)\, ds$ und $\delta(t) = (t,t)$ und verwenden Sie die Kettenregel. Außerdem können Sie annehmen, dass Integration und Differentiation vertauscht werden können.

3 **Trennung der Variablen.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)g(y), \quad y(\xi) = \eta \tag{1}$$

für stetige reelle Funktionen f, g. Dabei sei g strikt positiv.

a) Zeigen Sie, dass eine Lösung $y = y(x)$ von (1) die Gleichung

$$\int_\eta^y \frac{ds}{g(s)} = \int_\xi^x f(t)\, dt$$

erfüllt.

b) Bestimmen Sie mit dieser Methode die Lösung von

$$y'(x) = e^{y(x)} \sin x, \qquad y(0) = \eta.$$

Zeigen Sie: Für $\eta = -\log 2$ existiert die Lösung in $(-\pi, \pi)$ und ist nicht darüber hinaus fortsetzbar. Für $\eta < -\log 2$ existiert die Lösung $y(x)$ in ganz $\mathbb{R}$ und ist beschränkt.