Übungen zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. W. Müller
Dr. J. Müller

11. Übungsblatt, *2. Juli 2009*

Vorbemerkung. *Sei $M = f^{-1}(c)$ die Niveaumenge einer C^1-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ zu einem regulären Wert $c \in \mathbb{R}^m$. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ der Dimension $r = n - m$. Ein Vektor v in M heißt* Tangentialvektor *an $a \in M$, wenn es in M eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \varepsilon > 0$ gibt mit $\gamma(0) = a, \gamma'(0) = v$. Die Menge T_aM aller Tangentialvektoren an a ist ein $r-$dimensionaler $\mathbb{R}-$ Vektorraum, und es gilt $T_aM = \ker df(a)$.*

1 Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ die Quadrik

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Ax = 1\},$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ist. Zeigen Sie: Falls Q nicht leer ist, so ist es eine $(n-1)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Der Tangentialraum an $x_0 \in Q$ wird durch die Gleichung $x_0^t Ax = 1$ beschrieben.

2 Sei $D \in \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R})$ die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(1,1,1,-1)$. Die *Lorentzgruppe* $O(3,1) \subset \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$O(3,1) = \{X \in \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R}) \mid X^t DX = D\}.$$

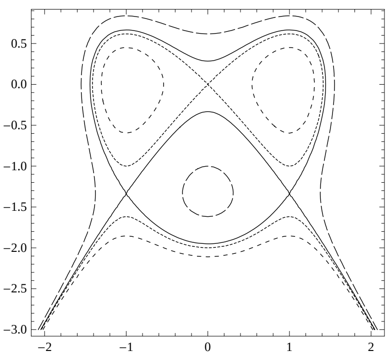
Sei $E = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ das Einselement in $O(3,1)$. Zeigen Sie: $O(3,1)$ ist eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{4\times 4}$ und $T_EO(3,1)$ besteht aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & e \\ -a & 0 & c & f \\ -b & -c & 0 & g \\ e & f & g & 0 \end{pmatrix}$$

3 Nebenstehende Abbildung illustriert die Höhenlinien $H_c := f^{-1}(\{c\})$ von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto y^2(2+y) - (2-x^2)x^2$$

für die Werte $c \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{27}, 1\}$.
Für welche dieser c ist H_c eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?



4 Die Gleichung des freien gedämpften Oszillators lautet

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

mit gewissen reellen Konstanten γ, ω, x_0, v_0 und $v_0, \gamma \geq 0$. Führen Sie diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf ein System erster Ordnung zurück.

Wie lautet die Lösung für $\gamma \neq \omega$?