

- 1** Besitzt die Gleichung $\sin \pi(x+y) = 1$ in der Nähe von $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ Lösungen? Beschreiben Sie die Lösungsmenge als Graph einer Funktion. *(10 Punkte)*

- 2** Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0 \\x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1\end{aligned}$$

in der Nähe von $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ durch eine C^1 -Abbildung

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

aufgelöst werden kann. Wie lauten die ersten Ableitungen der Abbildungen u und v ?

(10 Punkte)

- 3** Zeigen Sie, dass es eine C^1 -Kurve $c : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, die durch $(0, 0)$ geht und ganz in der Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xe^x + ye^y + xy = 0\}$$

verläuft. Für diese Kurve gilt, dass $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ um Ursprung $(0, 0)$ senkrecht auf c steht.

(10 Punkte)

- 4** Beweisen Sie den Satz über implizite Funktionen für den Fall $m = n = 1$ unter Verwendung des Resultats, dass $f(x, \cdot)$ monoton ist, falls $\partial_2 f(x, \cdot) \neq 0$ ist. *(10 Punkte)*