Übungen zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. W. Müller
Dr. J. Müller

9. Übungsblatt, *18. Mai 2009*

universitätbonn

1 **Zum Banachschen Fixpunktsatz.** Sei $\mathfrak{N}$ der vollständige normierte Raum reeller Nullfolgen. Die Norm auf $\mathfrak{N}$ ist dabei definiert durch $\|a\| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$ für $a = (a_0\, a_1\, a_2 \ldots)$.

Zu $i \in \mathbb{N}_0$ sei $e_i \in \mathfrak{N}$ die Folge $(0 \ldots 0 \overset{\downarrow i}{1} 0 \ldots)$. Damit kann $a \in \mathfrak{N}$ durch die formale Reihe $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_i,\ a_i \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Durch

$$v(a) = \frac{1}{2}(1 + \|a\|)e_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(1 - 2^{-i})a_{i-1}e_i$$

wird eine Abbildung $v : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ definiert.

Zeigen Sie: Die Einschränkung von v auf die Einheitskugel $B = \{a \in \mathfrak{N} \mid \|a\| \leq 1\}$ ist eine stetige Abbildung $v : B \to B$ derart, dass $\|v(x) - v(y)\| < \|x - y\|$, aber es gibt keinen Fixpunkt $v(z) = z \in B$. *(10 Punkte)*

Tipp: Verwenden Sie die für $0 \leq \alpha_i < 1$ gültige Ungleichung $\prod_i (1 - \alpha_i) \geq 1 - \sum_i \alpha_i$.

2 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Ferner gelte $\|f(x) - f(y)\| \geq \lambda\|x - y\|$ für alle $x, y \in U$ und ein $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $f : \Omega \to f(\Omega)$ ein Diffeomorphismus ist. *(10 Punkte)*

3 Zeigen Sie: Ist f ein Diffeomorphismus von $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\phi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, so gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass U für jedes $\varepsilon < |\varepsilon_0|$ durch $f^\varepsilon := f + \varepsilon\phi$ diffeomorph auf $f(U)$ abgebildet wird.

(10 Punkte)

4 Es seien H ein reeller Hilbertraum[1] und

$$f : H \to H, \qquad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}.$$

Bestimmen Sie $Y = \text{Bild}(f)$ und zeigen Sie, dass f ein C^∞–Diffeomorphismus $H \to Y$ ist. Wie lauten f^{-1} und df ? *(10 Punkte)*

---

[1] Ein reeller Hilbertraum ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$, der bezüglich der Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist.