Prof. Dr. W. Müller
Dr. J. Müller

Vorbemerkung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ heißt C^k-Diffeomorphismus, falls die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \to U$ existiert und eine C^k-Abbildung ist. Gibt es eine solche Umkehrabbildung nur lokal, so heißt f *lokaler* C^k-Diffeomorphismus. Der *lokale Umkehrsatz* besagt, dass f genau dann ein lokaler (C^1-)Diffeomorphismus in einer Umgebung von $x \in U$ ist, wenn $df(x)$ ein Isomorphismus des $\mathbb{R}^n$ ist.

1 Es sei U offen in $\mathbb{R}^m$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. Zeigen Sie: Ist $df(x)$ für alle $x \in U$ ein Isomorphismus des $\mathbb{R}^m$, so besitzt die Abbildung $g : x \mapsto \|f(x)\|$ kein Maximum in U. Ist ausserdem $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, so besitzt g keine Minimum. *(10 Punkte)*

2 Bestimmen Sie für die in a) – d) definierten Abbildungen jeweils $Y := f(X)$ und f^{-1}. Untersuchen Sie, ob f ein lokaler C^k-Diffeomorphismus, oder sogar ein (globaler) C^k-Diffeomorphismus $f : X \to Y$ ist.

a) $X = \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + a, y + b), \quad$ für $\quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

b) $X = \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 - x - 2, 3y)$

c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ *Tipp*: Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{C}$.

d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}, \quad f(x, y) = \big(\log(xy), (x^2 + y^2)^{-1}\big)$

(2+2+3+3 Punkte)

3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = (\sin x \cosh y, \cos x \sinh y)$.

a) Berechnen Sie $df(p)$ und die Determinante der Jacobi-Matrix von f bei $p \in \mathbb{R}^2$.

b) Was sind die Bilder $f(\Omega_1)$ und $f(\Omega_2)$ der Streifen $\Omega_k = \big((k-1)\cdot\frac{\pi}{2}, k\cdot\frac{\pi}{2}\big) \times \mathbb{R}$ mit $k = 1, 2$?

c) Zeigen Sie, dass sowohl $f \restriction \Omega_1$ als auch $f \restriction \Omega_2$ injektiv sind, aber dass $f \restriction \Omega_1 \cup \Omega_2$ nicht injektiv ist.

(4+3+3 Punkte)

4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $\gamma \in C^2(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie

a) Falls $H_\gamma(x) > 0$ für alle $x \in U$ (d.h. die Hesse-Matrix ist positiv definit auf U), so ist $f := \operatorname{grad}\gamma$ ein C^1-Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.

b) Gilt auf U ausserdem $H_\gamma(x) \geq \lambda \cdot \mathrm{Id}$ für $\lambda > 0$, so folgt für alle $x, y \in U$

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \lambda \|x - y\|.$$

(5+5 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie $\langle x - y, f(x) - f(y) \rangle$.