# Übungen zur Vorlesung Analysis II

**7. Übungsblatt**, *28. Mai 2009*

Prof. Dr. W. Müller
Dr. J. Müller

***1*** Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Terme zweiter Ordnung. *(12 Punkte)*

***2*** Wie lautet die Taylorreihe der Funktion

$$u(x)=\frac{1}{1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\,,\qquad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

im Entwicklungspunkt $0\in\mathbb{R}^n$ und wo konvergiert sie? *(10 Punkte)*

***3*** Sei $U$ eine konvexe offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f\in C^2(U,\mathbb{R})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(i) $f$ ist konvex, d.h. $f((1-t)a+tb)\le(1-t)f(a)+tf(b)$ für beliebige $a,b\in U$ und $t\in[0,1]$.

(ii) $f(x)\ge f(a)+df(a)(x-a)$ für alle $x,a\in U$. (Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von $f$ oberhalb jeder Tangentialebene liegt.)

(iii) Die Hesse-Matrix $H_f(a)$ ist positiv semidefinit in allen $a\in U$, d.h. $\langle h,H_f(a)h\rangle\ge 0$ für alle $h\in\mathbb{R}^n$.

*Hinweis: Zeigen Sie (i) $\iff$ (ii) und (ii) $\iff$ (iii).* *(7+8 Punkte)*

***4*** Klassifizieren Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto x^3-y^3-3\alpha xy$$

nach Maxima, Minima und Sattelpunkten in Abhängigkeit des Parameters $\alpha\in\mathbb{R}$.
*(13 Punkte)*

***5*** Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto(y-x^2)(y-2x^2)$. Zeigen Sie:

a) $f$ hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum

b) Für jedes $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ hat die Funktion $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},t\mapsto f(at,bt)$ in $(0,0)$ ein isoliertes lokales Minimum.

*(10 Punkte)*

---

*Dieses Übungsblatt erhöht die insgesamt erreichbare Punktzahl um 40 Punkte.*

*Die Abgabe erfolgt am* ***Mi 10.6.09, 12:00 Uhr*** *im Anschluss an die Vorlesung AlMa II im Großen Hörsaal, Wegelerstr. 10*