Übungen zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. W. Müller
Dr. J. Müller

6. Übungsblatt, *21. Mai 2009*

universitätbonn

---

1 Für $n > 1$ sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ und es gelte

$$\operatorname{grad} f(x) = \lambda(x)x$$

für eine Funktion $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f nur von $r = \|x\|$ abhängt.
Tipp: Betrachten Sie $f(x)$ an den Endpunkten x_0, x_1 einer C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to S_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$. *(10 Punkte)*

2 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t > 0 : \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ genau dann homogen vom Grad α ist, wenn die *Eulersche Homogenitätsrelation*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \quad \langle \operatorname{grad} f(x), x \rangle = \alpha f(x)$$

erfüllt ist. *(5+5 Punkte)*
Tipp: Zeigen Sie, dass $g(t) = t^\alpha f(x) - f(tx) = 0$ ist, indem Sie $g'(t)/g(t)$ berechnen.

3 Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Der *Laplaceoperator* $\Delta : C^2(U, \mathbb{R}) \to C^2(U, \mathbb{R})$ wird durch

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{m} \partial_j^2 u$$

erklärt. Eine Funktion $u \in C^2(U, \mathbb{R})$ heißt *harmonisch* in U, falls $\Delta u = 0$ ist.
Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$g_m : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g_m(x) := \begin{cases} \log \|x\|_2, & m = 2 \\ \|x\|_2^{2-m}, & m > 2 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ harmonisch sind. *(10 Punkte)*

4 Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $a_1, \ldots, a_m \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. Für $x \in U$ sei

$$[a_1, \ldots, a_m](x) := [a_1(x), \ldots, a_m(x)] \in \operatorname{Mat}(m, \mathbb{R})$$

die quadratische Matrix mit Spaltenvektoren $a_j(x) \in \mathbb{R}^m$ für $1 \leq j \leq m$.
Zeigen Sie: Es ist $\det[a_1, \ldots, a_m] \in C^1(U, \mathbb{R})$ und es gilt

$$(\det[a_1, \ldots, a_m])' = \sum_{j=1}^{m} \det[a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j', a_{j+1}, \ldots, a_m].$$

(10 Punkte)