Übungen zur Vorlesung Analysis II

5. Übungsblatt, *14. Mai 2009*

universitätbonn

Prof. Dr. W. Müller
Dr. J. Müller

1 Sei ℓ^2 die Menge aller Folgen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ komplexer Zahlen, so dass $\sum_i |\alpha_i|^2$ konvergiert. Für $\alpha \in \ell^2$ sei $|\alpha| := \big(\sum_i |\alpha_i|^2\big)^{1/2}$. Dann ist $(\ell^2, |\cdot|)$ ein vollständiger normierter Raum. Zeigen Sie: Die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{B} = \{\alpha \in \ell^2 \mid |\alpha|^2 \leq 1\}$ ist nicht kompakt, aber die Menge Q aller Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ mit $\forall k : |\alpha_k| \leq 1/k$ ist kompakt. *(5+5 Punkte)*

2 Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent zur Maximumsnorm $\|.\|_\infty$, d.h., für eine beliebige Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt es Konstanten $c, C > 0$ mit $c\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Tipp: Zeigen Sie, dass $\|.\|$ stetig ist und betrachten Sie die kompakte Einheitssphäre bezüglich $\|.\|_\infty$. *(10 Punkte)*

3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{xy}{r} \sin\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{mit } r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie: Die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ existieren in jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$. Die Abbildungen

$$x \mapsto \partial_1 f(x, b), \qquad y \mapsto \partial_2 f(a, y)$$

sind für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ stetig, aber f ist in $(0,0)$ nicht (total) differenzierbar. Ist f stetig partiell differenzierbar? *(10 Punkte)*

4 Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ und $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle = 0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \setminus N \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\langle Ax, x\rangle}$$

(total) differenzierbar ist, und bestimmen Sie df. *(10 Punkte)*

Abgabe am **Fr, 22.5.09, 12:00 Uhr** (im Anschluss an die Vorlesung) im Großen Hörsaal, Wegelerstr. 10