Übungen zur Vorlesung Analysis II Prof. Dr. W. Müller
4. Übungsblatt, *7. Mai 2009* universitätbonn Dr. J. Müller

---

1 Sei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{falls } x \in \mathbb{R}y \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist (die sog. „französische Eisenbahnmetrik“).

b) Skizzieren Sie für $n = 2$ die Menge aller Punkte, die Abstand 1 von $x = (1,1)$ bzw. $x = (-\frac{1}{2}, 0)$ haben.

c) Gibt es eine Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$, so dass $d(x,y) = \|x-y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$?

(6+2+2 Punkte)

2 Man bestimme den Rand, das Innere und den Abschluss der Teilmenge A des metrischen Raumes X. Welche dieser Mengen A sind offen, abgeschlossen, oder dicht in X?

a) $A = \mathbb{Q}, \quad X = \mathbb{R}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Q}^n \mid \|x\|_2 < 1\}, \quad X = \mathbb{R}^n$

c) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}, \quad X = \mathbb{R}^2$

d) $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 = \sin(\frac{1}{x_1}), 0 < x_1 \leq \frac{1}{2\pi}\right\}, \quad X = \mathbb{R}^2$

e) $A = \left\{f \in C([0,1]) \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,dx < 1\right\}, \quad X = C([0,1])$
mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{[0,1]}$

(je 3 Punkte)

3 Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig.
Zeigen Sie, dass der Graph $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ von f abgeschlossen in $X \times Y$ bezüglich der Produktmetrik ist. Folgt umgekehrt aus der Abgeschlossenheit von G_f die Stetigkeit von f? *(7+3 Punkte)*

4 Beweisen Sie, dass es genau ein $\xi \in [0,1]$ gibt mit $\xi = \cos\xi$. *(5 Punkte)*