1 Zeigen Sie für $s > 1$ mit der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ und der Gammafunktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{e^t - 1}.$$

(10 Punkte)

2 **Cauchy-Form des Restglieds.** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)-$mal differenzierbare Funktion auf einem Intervall I und $a \in I$. Zu jedem $x \in I$ gibt es dann eine Zahl $\theta \in (0,1)$ mit

$$f(x) - T_n f(x;a) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \cdot (x-a)^{n+1}(1-\theta)^n.$$

Tipp: Mittelwertsatz für $T_n f(x;\cdot)$ *(10 Punkte)*

3 **Binomialreihe.**

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (1+x)^s,\ s \in \mathbb{C}$ um $x = 0$.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung um $x = 0$ von $x \mapsto \log(x + \sqrt{1+x^2})$ an.

c) Vergleichen Sie das Restglied aus Aufgabe 2 für $\beta(x) = (1+x)^s$ bei $x = 0$ mit dem Lagrange-Restglied.

(4+3+3 Punkte)

4 a) Die reelle Funktion f sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von a. Ist

$$f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0, \quad f^{(n+1)}(a) \neq 0,$$

so hat f in a ein lokales $\left\{ \begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix} \right\}$, falls n ungerade ist und $\left\{ \begin{matrix} f^{(n+1)}(a) > 0 \\ f^{(n+1)}(a) < 0 \end{matrix} \right\}$.

b) Durch $f(0) = 0$ und $f(x) = e^{-1/x^2}(2 + \sin\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ ist eine Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit Minimum bei 0 definiert. Kann dieses Minimum durch das Kriterium aus a) erfasst werden?

(4+6 Punkte)