Übungen zur Vorlesung *Analysis II* Prof. Dr. W. Müller
1. Übungsblatt, *16. April 2009* Dr. J. Müller

---

1 Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) von $\arctan x$ in einer Umgebung von $x = 0$, indem Sie zunächst $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ zeigen, und berechnen Sie den Konvergenzradius. Verwenden Sie dabei, dass eine Potenzreihe innerhalb des Konvergenzradius' gliedweise differenziert werden darf. *(10 Punkte)*

2 Berechnen Sie die folgenden Integrale, indem Sie mit Treppenfunktionen mit den angegebenen Sprungstellen approximieren.

a) $\displaystyle\int_1^y x^n\,dx = \frac{y^{n+1}-1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0, y > 0$ durch Sprungstellen $\{y^{k/m} \mid 0 \le k < m\}$ für $m \in \mathbb{N}$ *(5 Punkte)*

b) $\displaystyle\int_0^y \cos x\,dx = \sin y$ durch Sprungstellen $\{yk/m \mid k \in \mathbb{N}, k < m\}$ für $m \in \mathbb{N}$

Tipp: Es gilt $2\cos jh \sin\frac{h}{2} = -\sin(jh - h/2) + \sin(jh + h/2)$. *(5 Punkte)*

3 Sei die Funktion $\Psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational oder } x = 0 \\ 1/q, & \text{falls } x = p/q \text{ mit teilerfremden } p, q > 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass es eine Folge (ϕ_n) von Treppenfunktionen gibt mit $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,1] : 0 \le \Psi(x) \le \phi_n(x)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)\,dx = 0.$$

(8 Punkte)

b) Ist Ψ gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar? *(2 Punkte)*

4 Sei $f \in C^2([0,1])$. Zeigen Sie

$$\left|\frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \frac{1}{12} \sup_{\xi\in(0,1)} |f''(\xi)|.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\int_0^1 \Phi'(x) f'(x)\,dx$ für $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x)$ und verwenden Sie partielle Integration. *(10 Punkte)*

universitätbonn