1 Lie-Gruppen

Ein Lie-Gruppe ist eine Gruppe und gleichzeitig differenzierbare Mannigfaltigkeit für die gilt:

$$(a,b) \in G \mapsto a^{-1}b$$

ist eine differenzierbare Abbildung. Sei L_a (bzw. R_a) die Translation auf G von links (bzw. von rechts), d.h.

$$L_a x = ax \qquad R_a x = xa \quad \forall a \in G$$

Für $a \in G$ sei $ad(a)$ der innere Automorphismus definiert durch:

$$ad(a)(x) := axa^{-1} \quad \forall x \in G$$

Sei g die Algebra der linksinvarianten Vektorfelder auf G, d.h. die Menge aller Vektorfelder X auf G für die gilt:

$$X_{R_a x} = R_{a*} X_x$$

Dann gilt g ist isomorph zu $T_e G$. Die Abbildung $ad(a)$ erzeugt eine Darstellung von G in g, die sogenannte adjungierte Darstellung, die wir mit $Ad(a)$ bezeichnen.
$A \in g$ erzeugt eine 1-Parametergruppe auf G. Sei a_t die Kurve, die die Gleichung

$$L_{a^{-1}*} \dot{a}_t = A_e \qquad a_0 = e$$

löst.Wir definieren

$$exp(A) := a_1 \quad \rightarrow \quad a_t = exp(ta)$$

Operiere nun G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, d.h.

1. Für alle $a \in G$ existiert eine $1:1$ Transformation $x \mapsto xa$ in M
2. $(a,x) \in G \times M \rightarrow x \in M$ ist differenzierbar.
3. $x(ab) = (xa)b$

Bemerkung 1.1 *Wir schreiben $R_a x$ für xa und $L_a x$ für ax. Da R_e, L_e $1:1$ und wegen 3) gilt $L_e = R_e = id_M$*

Definition 1.2 *G operiert effektiv (bzw. frei) auf M $\Leftrightarrow$ $R_a x = x$ für alle (bzw. für ein) $x \in M$, so ist $a = e$.*

Definition 1.3 *Operiere G von rechts auf M. Sei $A \in g$, dann sei $A^* \in X(M)$ definiert durch:*

$$A_x^* := \frac{d}{dt}(exp(tA)x)_{t=0}$$

wobei $X(M)$ die Vektorfelder auf M sind.

Lemma 1.4 *Sei G Lie-Gruppe und M differenzierbare Mannigfaltigkeit. G operiere auf M von rechts.Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : g & \rightarrow & X(M) \\ A & \mapsto & A^* \end{array}$$

ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus.
Operiert G effektiv auf M so ist σ ein Isomorphismus.
Operiert G frei auf M so gilt für jedes $A \in g \neq 0$, $\sigma(A)$ verschwindet nie auf M.

2 Faserbündel

Sei G Lie-Gruppe und M differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 2.1 *Ein (diff.bares) Hauptfaserbündel (HFB) $P(M,G,\pi)$ über M mit Gruppe G besteht aus einer (diff.baren) Mannigfaltigkeit P und einer Operation von G auf P mit:*

1. *G operiert frei auf P von rechts*

$$(u,a) \in P \times G \to ua = R_a u \in P$$

2. *M ist Quotient von P bezüglich der Gruppenoperation von G, d.h $M = P/G$ und die kanonische Projektion*

$$\pi : P \to M$$

ist differenzierbar.

3. *P ist lokal trivial, d.h. für alle $x \in M$ existiert eine Umgebung $U(x) \subset M$, sodaß $\pi^{-1}(U(x))$ isomorph zu $U \times G$ ist, in dem Sinnes, daß ein Diffeomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \pi^{-1}(U) & \to & U \times G \\ u & \mapsto & (\pi(u), \varphi(u)) \end{array}$$

existiert mit

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to G \text{ und } \varphi(ua) = \varphi(u)a \quad u \in P, a \in G$$

Bezeichnungen

1. Ein Hauptfaserbündel wird mit $P(M,G,\pi), P(M,G)$ oder mit P bezeichnet.

2. P heißt "totaler Raum" oder "Bündelraum".

3. M heißt "Basisraum"

4. G heißt "Strukturgruppe"

5. $\pi^{-1}(x)$ heißt "Faser" von x und ist Untermannigfaltigkeit von P, diffeomorph zu G.

Bemerkung 2.2 *$P(M,G)$ heißt trivial, falls gilt:*

$$P = M \times G \text{ und } R_b u = (x, ab) \text{ mit } u = (x, a)$$

Definition 2.3 *Sei P Hauptfaserbündel. Sei*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : g & \to & X(P) \\ A & \mapsto & A^* \end{array}$$

die von der Operation von G induzierte Abbildung. A^* heißt Fundamentales Vektorfeld bezüglich A.

Da die Operation von G Fasern in sich abbildet, ist A^*_u tangential an die Faser in u. Weil G frei auf P operiert, verschwindet A^* genau dann, wenn $A = 0$. Daraus folgt, da die Dimension der Faser gleich der Dimension von g ist, daß die Abbildung:

$$A \to (A^*)_u$$

ein linearer Isomorphismus auf den Tangentalraum der Faser in u ist.

Lemma 2.4 *Sei A^* fundamentales Vektorfeld zu A. Dann ist für jedes $A \in G$, $(R_a)_* A^*$ fundamentales Vektorfeld zu $(Ad(a^{-1}))A$*

Beweis: A^* ist induziert von der Kurve a_t mit $a_t = exp(tA)$. Dann gilt, $(R_a)_* A^*$ ist induziert von $R_a R_{a_t} R_{a^{-1}} = R_{a a_t a^{-1}}$. Desweiteren ist $a a_t a^{-1}$ die Einparametergruppe erzeugt von $(Ad(a^{-1}))A \in g$.

□

Definition 2.5 *Sei $P(M,G)$ HFB und F (diff.bare) Mannigfaltigkeit, auf der G von links operiert. Das zu P assoziierte Faserbündel $E(M,F,G,P)$ mit Standartfaser F wird wie folgt konstruiert. Sei eine Operation von G auf $P \times F$ definiert durch:*

$$a : (u, \xi) \in P \times F \mapsto (ua, a^{-1}\xi) \in P \times F$$

E sei definiert als $P \times_G F$ Quotient bezüglich der obigen Operation. Sei

$$\pi_E : E \to M$$

die Abbildung, die durch die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} P \times F & \to & M \\ u \times \xi & \mapsto & \pi(u) \end{array}$$

induziert wird.

Bemerkung 2.6 *Es gilt:*

$$\pi^{-1}(U) \cong U \times G.$$

Daher ist die Operation von G *auf* $\pi^{-1}(U) \times F$ *gegeben durch*

$$(x, a, \xi) \mapsto (x, ab, b^{-1}\xi) \qquad (x, a, \xi) \in U \times G \times F,\ b \in G$$

Daher gilt

$$\pi_E^{-1}(U) \cong U \times F$$

E *erhält seine differenzierbare Struktur indem wir die Karten*

$$U \times F \xrightarrow{\cong} \pi_E^{-1}(U)$$

einführen.

Lemma 2.7 *Sei* $P(M, G)$ *HFB und* $E(M, F, G, P)$ *das dazu assoziierte Bündel. Für alle* $u \in P$ *und* $\xi \in F$ *sei* uf *definiert als das Bild von* $(u, \xi) \in P \times G$ *unter kanonische Projektion* $P \times F \to E$*. Dann ist jedes* u *eine Abbildung von* F *nach* $F_x = \pi_E^{-1}(x)$ *mit* $\pi(u) = x$ *und*

$$(ua)\xi = u(a\xi)$$

Beweis: Sei u lokal gleich (x, b), dann gilt

$$(ua)\xi = \overline{(x, ab, \xi)} = \overline{(x, b, a\xi)} = u(a\xi)$$

□

Beispiel 1: Rahmenbündel $L(M)$

Sei M Mfg., dim M=n
Ein linearer Rahmen u an einem Punkt $x \in M$ ist eine geordnete Basis $\{X_1, .., X_n\}$ von T_xM. Sei

$$L_x(M) := \{u | u \text{ ist linearer Rahmen in } x\}$$

Sei $L(M) = \bigsqcup_{x \in M} L_x(M)$ disjunkte Vereinigung.
Behauptung: $L(M)$ ist HFB.
Beweis: Sei $GL(n; \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. $GL(n; \mathbb{R})$ operiert auf $L(M)$ wie folgt:
Sei $a = (a_{ij}) \in GL(n; \mathbb{R})$ und $u = (X_1, ..., X_n) \in L_x$. $ua = (Y_1, ..., Y_n) \in L_x$ sei definiert durch:

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i$$

Eine differenzierbare Struktur wird am Ende eingeführt.

1. G operiert offensichtlich frei auf $L(M)$.

2. Sei
$$\begin{array}{rccc} \pi : & L(M) & \rightarrow & M \\ & u \in L_x & \mapsto & x \end{array}$$
Es gilt
$$\pi(u) = \pi(v) \Rightarrow v, u \in L_x(M) \Rightarrow \exists a \in GL(n; \mathbb{R}) : v = ua$$
Daraus folgt:
$$M = P/G$$

3. Seien $(\partial x_1, ..., \partial x_n)$ lokale Koordinaten in $U \subset M$. Dann läßt sich jeder Rahmen $u = (X_1, \ldots, X_n)$ eindeutig darstellen durch
$$X_i := \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \partial x_j$$
wobei $(X_{ij}) \in GL(n; \mathbb{R})$. Daraus folgt, daß $\pi^{-1}(U)$ $1:1$ mit $U \times GL(n; \mathbb{R})$ ist.

Die differenzierbare Struktur erhält man nun durch die Karten
$$U \times GL(n; \mathbb{R}) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

Beispiel 2: Das Tangentialbündel $T(M)$.

Operiere $GL(n; \mathbb{R})$ von links auf $\mathbb{R}^n$ durch Matrixmultiplikation auf Vektoren bezüglich der Standartbasis. Das Tangentialbündel $T(M)$ sei das zu $L(M)$ assoziierte Faserbündel mit Standartfaser $\mathbb{R}^n$. Dann ist $T(M)$ lokal diffeomorph zu $U \times \mathbb{R}^n$ und die Fasern über x sind die Tangentialräume $T_x(M)$. Das wird anschaulich, wenn wir die in Lemma 2.7 erwähnte Abbildung
$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi_E^{-1}(x) \text{ mit } x = \pi(u)$$
betrachten. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standartbasis auf $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir für $u = \{X_1, \ldots, X_n\} \in L_x(M)$ die Abbildung:
$$ue_i := X_i$$
durch lineare Fortsetzung. Es ist klar das gilt:
$$(ua)\xi = u(a\xi)$$

Definition 2.8 *Ein Schnitt eines Bündels $E(M, F, G, P)$ ist eine Abbildung*

$$s : M \to E$$

für die gilt $\pi_E \circ s = id_M$

3 Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln

Sei $P(M, G)$ HFB. Für $u \in P$ bezeichne G_u den Unterraum von $T_u(P)$, der tangential an die Faser $\pi^{-1}(x)$ mit $x = \pi(u)$ liegt.

Definition 3.1 *Ein Zusammenhang Γ in P ist die Zuordnug eines Unterraums $Q_u \subset T_u(P)$, sodaß für alle $u \in P$ gilt:*

1. $T_u(P) = G_u + Q_u$ *(direkte Summe)*
2. $Q_{ua} = R_{a\star} Q_u \quad \forall u \in P, a \in G$
3. Q_u *hängt differenzierbar von u ab.*

Bezeichnungen :

1. G_u heißt "vertikaler Unterraum", Q_u heißt "horizontaler Unterraum"
2. Ein Vektor X heißt vertikal (bzw. horizontal) falls $X \in G_u$ (bzw. $X \in Q_u$).
3. Jedes $X \in T_u(P)$ kann eindeutig geschrieben werden als:

$$X = Y + Z \qquad Y \in G_u, Z \in Q_u$$

   Dann heißen $Y =: vX$ vertikale und $Z =: hX$ horizontale Komponente von X.

Definition 3.2 *Sei ω g-wertige 1-Form mit:*

$$\omega : \begin{array}{ccc} T_u(P) & \rightarrow & g \\ X & \mapsto & A \end{array}$$

wobei $(A^*)_u = vX$. ω heißt "Zusammenhangsform" zu Γ.

Lemma 3.3 *Die Zusammenhangsform ω erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

1. $\omega((A^*)_u) = A$ *für alle $u \in P, A \in g$*
2. $(R_a)^*\omega = Ad(a^{-1})\omega \quad$ *d.h.* $\quad \omega((R_a)_* X) = Ad(a^{-1})\omega(X)$ *für alle $X \in T_u(P), a \in G$*

Umgekehrt existiert für jede g-wertige 1-Form ω, die 1) und 2) erfüllt, ein eindeutiger Zusammenhang Γ mit Zusammenhangsform ω.

Beweis:1. ist klar.
Da man jedes Vektorfeld auf P eindeutig in horizontalen und vertikalen Anteil zerlegen kann, betrachten wir die Fälle X ist horizontal und X ist vertikal.
2a.)Sei X horizontal, dann gilt $R_{a*}(X)$ ist horizontal:

$$\Rightarrow \quad R_a^*(\omega(X)) = \omega(R_{a*}(X)) = 0 \quad \text{und} \quad Ad(a^{-1})\omega(X) = 0$$

2b.)Sei X vertikal. Dann können wir annehmen, daß X ein fundamentales Vektorfeld A^* ist. Dann ist $R_{a*}(X)$ fundamentales Vektorfeld zu $Ad(a^{-1})A$ und es gilt:

$$(R_a^*)\omega_u(X) = \omega_{ua}((R_a)_*X) = \omega_{ua}((Ad(a^{-1})A)^*) = Ad(a^{-1})A = Ad(a^{-1})(\omega_u(X))$$

Sei nun umgekehrt ω mit 1. und 2. gegeben. Wir definieren:

$$Q_u := \{X \in T_uP | \omega_u(X) = 0\}$$

Behauptung: $u \mapsto Q_u$ ist ein Zusammenhang.

⌜

Sei G_u der Tangentialraum an die Faser in u. Es gilt:

$$dim T_u(P) = dim(im(\omega_u)) + dim(ker(\omega_u))$$

Da $ker(\omega_u) = Q_u$, g isomorph zu G_u ist und $Q_u \cap G_u = \emptyset$ gilt:

$$T_u(P) = G_u + Q_u$$

Sei $X \in Q_u$, dann gilt:

$$\omega_{ua}(R_{a*}X) = R_a^*\omega_u(X) = Ad(a^{-1})\omega_u(X) = 0$$

Sei $Y \in Q_{ua}$, dann gilt:

$$\omega_{uaa^{-1}}(R_{a^{-1}*}Y) = R_{a^{-1}}^*\omega_{ua}(Y) = Ad(a^1)\omega_{ua}(Y) = 0$$

daraus folgt:

$$R_a^*Q_u = Q_{ua} \quad \forall u \in P, a \in G$$

⌞

□

Die Projektion $\pi : P \to M$ induziert $d\pi : T_u(P) \to T_x(M)$ wobei $u \in P$ und $\pi(u) = x$.

Definition 3.4 *Sei Γ gegeben. Dann gilt:*

$$d\pi : Q_u \to T_x(M) \qquad u \in P, \pi(u) = x$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

⌜

1. *$dimQ_u = dimT_xM$ ist klar, da P lokal diffeomorph ist zu $U \times G$*
2. *$d\pi(X) = 0 \Rightarrow X \in G_u \Rightarrow X \notin Q_u$*

⌞

Der Horizotale Lift eines Vektorfeldes X auf M ist das eindeutige horizontale Vektorfeld X^P auf P, für das gilt

$$d\pi(X_u^*) = X_{\pi(u)} \quad \forall u \in P$$

3.1 Krümmungsform und Strukturgleichung

Definition 3.5 *Sei $P(M,G)$ Hauptfaserbündel und ρ sei eine Darstellung von G in einem endlichdimesionalen Vektorraum V.Eine pseudotensorielle Form vom Grad r auf P vom Typ (ρ, V), ist eine $V-$wertige r-Form φ auf P für die gilt:*

$$R_a^*\varphi = \rho(a^{-1})\varphi \quad a \in G$$

φ heißt tensorielle Form falls gilt:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_r) = 0$$

sobald ein Vektor X_i vertikal ist.

Sei Γ Zusammenhang auf P mit $T_u(P) = G_u + Q_u$ und

$$h : T_u(P) \to Q_u$$

sei die Projektion auf den horizontalen Raum.

Lemma 3.6 *Sei φ pseudotensorielle r-Form auf P vom Typ (ρ, V), dann gilt:*

1. *Sei φh definiert als*

$$(\varphi h)_u(X_1, \dots, X_r) = \varphi_u(hX_1, \dots, hX_r)$$

   Dann ist φh tensorielle r-Form von Typ (ρ, V).

2. *$d\varphi$ is eine pseudotensorielle $(r+1)$-Form vom Typ (ρ, V).*

3. *Die (r+1)-Form $D\varphi := (d\varphi)h$ ist eine tensorielle Form vom Typ (ρ, V).*

Beweis:

1. folgt daraus, daß gilt

$$h \circ R_{a*} = R_{a*} \circ h$$

   ⌜

$$R_{a*}(hX + vX) = \underbrace{R_{a*}(hX)}_{horizontal} + \underbrace{R_{a*}(vX)}_{verikal} = h(R_{a*}X) + v(R_{a*}X)$$

   aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt das gewünschte.

   ⌞

   Es gilt

$$\begin{aligned}
R_a^*(\varphi h)_u(X_1, \dots, X_r) &= (\varphi h)_{ua}(R_{a*}X_1, \dots, R_{a*}X_r) \\
&= (\varphi)_{ua}(hR_{a*}X_1, \dots, hR_{a*}X_r) \\
&= (\varphi)_{ua}(R_{a*}hX_1, \dots, R_{a*}hX_r) \\
&= R_a^*(\varphi)_u(hX_1, \dots, hX_r) \\
&= \rho(a^{-1})(\varphi)_u(hX_1, \dots, hX_r) \\
&= \rho(a^{-1})(\varphi h)_u(X_1, \dots, X_r)
\end{aligned}$$

   Sei nun X_i vertikal, dann gilt $hX_i = 0 \rightarrow (\varphi h)(X_1, \dots, hX_i, \dots, hX_r) = 0$

2. Folgt genauso aus der Tatsache das gilt:

$$d \circ R_a^* = R_a^* \circ d$$

3. folgt aus 1) & 2)

Die Form $D\varphi = (d\varphi)h$ heißt äußere kovariante Ableitung von φ

Definition 3.7 *Sei $\rho = Ad$ die adjungierte Darstellung von G in der Lie-Algebra g. Dann ist die Zusammenhangsform ω pseudotensorielle 1-Form vom Typ (ρ, g) oder auch adG.*
Sei $\Omega := D\omega$ tensorielle 2-Form vom Typ adG. Ω heißt Krümmungsform von ω.

Theorem 3.8 *(Strukturgleichung)*
Sei ω Zusammmenhangsform und Ω Krümmungsform.Dann gilt:

$$d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(X)] + \Omega(X,Y) \qquad \textit{für } X, Y \in T_u(P), u \in P$$

Beweis: Da wir X, Y eindeutig in vertikalen und horzontalen Anteil zerlegen können und Ω linear auf beiden Stellen ist, betrachen wir:

1. X, Y seien horizontal. Dann gilt:

$$d\omega(X,Y) = d\omega(hX, hY) = D\omega(X,Y) = \Omega(X,Y) - \frac{1}{2}\underbrace{[\omega(X), \omega(Y)]}_{=0}$$

2. X, Y seien vertikal. Dann können wir annehmen, daß $X = A^*, Y = B^*$ in u, wobei a^*, B^* fundamentale Vektorfelder sind.

$$\begin{aligned} 2d\omega(A^*, B^*) &= A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A^*, B^*]) \\ &= -\omega([A,B]^*) = -[A,B] = -[\omega(X), \omega(Y)] \end{aligned}$$

Da gilt $\omega(A^*) = A, \;\; [A^*, B^*] = [A,B]^*$. Weiter ist

$$\Omega(X,Y) = d\omega(hX, hY) = 0$$

3. Sei X horizontal, Y vertikal. Wir setzen X horizontal zu einem Vektorfeld X fort, sei $Y = A^*$ in u. Da die rechte Seite der Gleichung verschwindet bleibt zu zeigen $d\omega(X, A^*) = 0$. Es gilt:

$$2d\omega(X, A^*) = X(\omega(A^*)) - A^*(\omega(X)) - \omega([X, A^*]) = -\omega([X, A^*])$$

Es bleibt zu zeigen: Ist X horizontal, so auch $[X, A^*]$.

Sei A^* induziert durch R_{a_t} wobei a_t 1-Parametergruppe zu $A \in G$. Dann gilt:

$$[X, A^*] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[R_{a_t *}(X) - X]$$

Nun sind X und $R_{a_t}X$ horizontal, damit auch $[X, A^*]$.

$\square$

Theorem 3.9 *(Bianchi Identität)*

$$D\Omega = 0$$

3.2 Parallelverschiebung und horizontaler Lift

Definition 3.10 *Ein horizontaler Lift einer Kurve $\tau = x_t,\ a \leq t \leq b$ in M ist eine horizontale Kurve $\tau^* = u_t$, sodaß gilt:*

$$\pi(u_t) = x_t \quad a \leq t \leq b$$

Bemerkung 3.11 *Dieser Lift hängt wie folgt mit dem Lift von Vektorfeldern zusammen. Sei X^* Lift von X, dann ist die Intergralkurve von X^* durch u_0 der Lift der Intergralkurve von X durch $\pi(u_0) = x_0$.*

Lemma 3.12 *Sei $\tau = x_t, \quad 0 \leq t \leq 1$ C^1-Kurve in M, dann gilt: Für alle $u \in P$ mit $\pi(u) = x_0$ existiert ein eindeutiger Lift $\tau^* = u_t$ von τ, sodaß $u = u_0$.*

Beweis: lang!

Wir haben nun durch die Hochhebung von τ zu τ^* eine Abbildung $\tau : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$.

Definition 3.13 *Die Abbildung $\tau : \pi(x_0) \to \pi(x_1)$ heißt parallele Verschiebung entlang τ. Aufgrund des folgenden Lemmas ist τ ein Isomorphismus.*

Lemma 3.14 *Die Parallelverschiebung vertauscht mit den Operationen von G auf P,d.h.:*

$$\tau \circ R_a = R_a \circ \tau \qquad \forall a \in G$$

Definition 3.15 *Auf E wird der Zusammenhang, d.h. der horizontale Unterraum Q_ω und der vertikale Unterraum F_ω von $T_\omega E$ wie folgt definiert:*

1. *Sei F_ω der Tangentialraum an die Faser in ω.*

2. *Betrachte die Abbildung:*

$$\begin{array}{rcl} P \times F & \to & E \\ u \times \xi & \mapsto & u\xi \end{array}$$

Sei nun (u, ξ) so, daß $u\xi = \omega$. Dann halte ξ fest und sei f definiert als:

$$\begin{array}{rcl} f : P & \rightarrow & E \\ f(v) & = & v\xi \end{array}$$

Dann sei:

$$Q_\omega := f_*(Q_u)$$

Der Raum Q_ω ist unabhangig von der Wahl von (u, ξ) und es gilt:

$$T_\omega E = Q_\omega + F_\omega \qquad \textit{direkte Summe}$$

⌜

habe ich keine Lust zu

⌞

Definition 3.16 *Analog zum horizontalen Lift und der Parallelverschiebung auf P werden Lift und Parallelverschiebung auf E definiert.*

3.3 Kovariante Ableitung in Vektorbündeln

Sei $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. $GL(M, F)$ operiere auf F^m durch Multilikation von von links. Sei $P(M, G)$ HFB und ρ eine Darstellung von G nach $GL(M, F^m)$. Dann sei $E(M, F^m, G, P)$ das assoziierte Bündel mit Standartfaser F^m, wobei G durch ρ auf F^m operiert.
Sei S die Menge der Schnitte

$$s : E \rightarrow M$$

Wie bereits bekannt ist S ein F-Vektorraum und ein Modul über den F-wertigen Funktionen.

Definition 3.17 *Sei φ Schnitt in E, definiert auf $\tau = x_t$,sodaß*

$$\pi_E \circ \varphi(x_t) = x_t \qquad \forall t$$

Sei $\dot{x}_t$ Tangentialvektor an τ in X_t.Dann sei für jedes t die kovariante Ableitung $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi$ von φ in Richtung $\dot{x}_t$ definiert durch:

$$\nabla_{\dot{x}_t}\varphi := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{h}[\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t)]$$