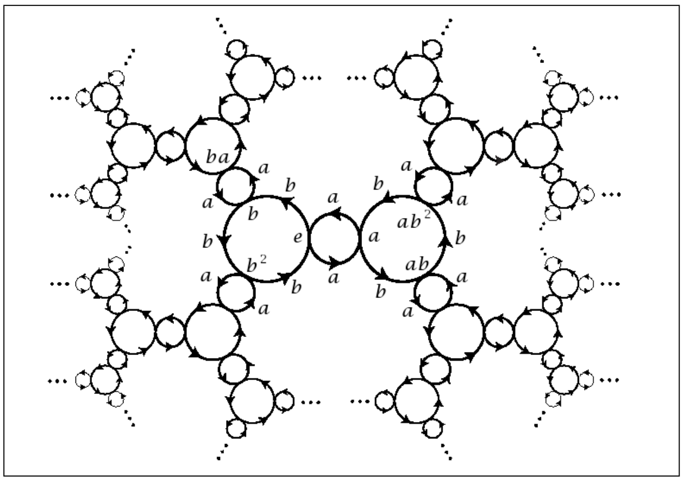
# Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

**Blatt 3** Abgabe: Freitag, 5.11.2010




Ein Cayley Graph für $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (aus "Algebraic Topology", Allen Hatcher)

**Aufgabe 11** (Gruppen mit 8 Elementen)

Wir betrachten die Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die durch

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Es handelt sich um die Quaternionengruppe $\mathcal{Q}_8$: eine Gruppe mit 8 Elementen.

a) Man zeige, daß diese Gruppe sowohl durch die Präsentierung

$$\langle i, j, k | i^4 = 1, i^2 = j^2 = k^2, ij = k, jk = i, ki = j \rangle$$

als auch durch

$$\langle i, j | i^4 = 1, i^2 = j^2, jij = i \rangle$$

gegeben ist und zeiche die dazugehörigen Cayley-Graphen.

b) Ist $\mathcal{Q}_8$ auch durch die Präsentierung

$$\langle i, j | i^4 = j^2 = 1, jij = i^3 \rangle$$

gegeben? Man nenne eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, die durch diese Präsentierung gegeben ist.

c) Ist die Gruppe, die durch die Präsentierung

$$\langle i, j | i^2 = j^2 = (ij)^2 = 1 \rangle$$

gegeben ist isomorph zu $\mathcal{Q}_8$ oder der in b) beschriebenen Gruppe?

**Aufgabe 12** (Erzeugendensysteme II)

Es sei $\mathcal{E} \subset G$ ein Erzeugendensystem in $G$. Sei $H$ eine weitere Gruppe, $H'$ eine Untergruppe von $H$ und sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus.

a) Sei $a \in G$, so daß $ea = ae$ für alle $e \in \mathcal{E}$. Dann gilt $ga = ag$ für alle $g \in G$.

b) Gilt $ee' = e'e$ für alle $e, e' \in \mathcal{E}$, dann ist $G$ abelsch.

c) Ist $f(e) \in H'$ für alle $e \in \mathcal{E}$ , dann ist $\mathrm{im}(f) \subset H'$.

d) Sei $b \in H$, so daß $f(e)b = bf(e)$ für alle $e \in \mathcal{E}$. Dann gilt $f(g)b = bf(g)$ für alle $g \in G$.

e) Sei $G$ nun abelsch und sei $n$ eine natürliche Zahl, so daß $e^n = 1$ für alle $e \in \mathcal{E}$. Dann gilt $g^n = 1$ für alle $g \in G$.

**Aufgabe 13** (Retraktion und freie Gruppen)

a) In der kurzen exakten Sequenz von Gruppen

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 1$$

sei Q eine freie Gruppe. Man zeige: Es gibt einen Homomorphismus $h : Q \to G$, so daß $g \circ h = 1_Q$.

b) Man finde eine kurze exakte Sequenz wie in a), wobei $Q$ nicht frei ist und kein Homomorphismus $h$ wie oben existiert.

c) Nun seien $X$ und $Y$ Mengen und $X \subset Y$. Es gibt eine injektive Abbildung $\iota : \mathrm{Fr}(X) \to \mathrm{Fr}(Y)$ und eine Abbildung $r : \mathrm{Fr}(Y) \to \mathrm{Fr}(X)$ so daß $r \circ \iota = 1_{\mathrm{Fr}(X)}$.

d) Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{Fr}(X) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Fr}(Y) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Fr}(Y - X) \longrightarrow 1$$

und einen Homomorphismus $s : \mathrm{Fr}(Y - X) \to \mathrm{Fr}(Y)$, so daß $\pi \circ s = 1_{\mathrm{Fr}(Y-X)}$.

**Aufgabe 14** ($\mathbb{Q}$ ist nicht endlich erzeugt)

***Aufgabe 15** (Kantenwegegruppe eines Graphen)

Es sei $\Gamma = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, $V$ die Menge der Knoten und $E$ die Menge der Kanten. Wir definieren eine Strecke als ein Tripel $s = (\alpha(e), e, \omega(e))$, wobei $e \in E$ und $\alpha(e)$ und $\omega(e)$ Knoten der Kante $e$ sind. Zu einer Strecke $s = (\alpha(e), e, \omega(e))$ sei die inverse Strecke $\bar{s} = (\omega(e), e, \alpha(e))$. Ein Weg in $\Gamma$ eine endliche Folge $p = s_1 \dots s_k$, von Strecken $s_i = (\alpha(e_i), e_i, \omega(e_i))$, so daß $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ für $1 \leq i < k$. Der Anfang eines Weges $p = s_1 \dots s_k$ ist $\alpha(e_1)$, das Ende $\omega(e_k)$. Eine elementare Transformation eines Weges $p$ ist ein Weg der durch Einfügung oder Kürzung von $s\bar{s}$, wobei $s$ eine Strecke sei, an beliebiger Stelle in der endlichen Folge entsteht. Wir fixieren einen Knoten $v$ und betrachten $P(\Gamma, v)$, die Menge aller Wege mit Anfang und Ende $v$. Zwei Wege $p, q \in P(\Gamma, v)$ heißen homotop, falls man $p$ aus $q$ mit Hilfe von elementaren Transformationen bekommen kann. Man zeige:

a) $p \simeq q :\Leftrightarrow$ "$p$ und $q$ sind homotop" ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen werden auch Homotopieklassen genannt.

b) Die Menge $\pi_1(\Gamma, v) := P(\Gamma, v)/\simeq$ von Homotopieklassen ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation

$$[p][q] \mapsto [pq],$$

wobei $pq$ die Konkatenation von endlichen Folgen bezeichnet. Diese Gruppe heißt Kantenwegegruppe von $\Gamma$ bezüglich $v$.

c) Sei $w$ ein weiterer Knoten. Dann gibt es einen Isomorphismus $\pi_1(\Gamma, v) \cong \pi_1(\Gamma, w)$.

d) Die Kantenwegegruppe $\pi_1(\Gamma, v)$ ist frei. (Hinweis: Man betrachte einen aufspannenden Baum).