

Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 13

Abgabe: Freitag, 28.1.2011

Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen.

(Von den Herren *Frobenius* und *Stickelberger* in Zürich.)

Die Theorie der endlichen Gruppen von vertauschbaren Elementen haben einerseits *Euler* und *Gauss*, andererseits *Lagrange* und *Abel* begründet, jene in ihren zahlentheoretischen Untersuchungen über Potenzreste, diese in ihren algebraischen Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen. Nach diesen grundlegenden Untersuchungen haben *Gauss* und Herr *Schering* die Theorie weiter entwickelt. *Gauss* (*Démonstration de quelques théorèmes concernant les périodes des classes des formes binaires du second degré*, Werke, Bd. II, S. 266) lehrt die Zerlegung einer Gruppe in primäre Gruppen, deren Ordnungen relative Primzahlen sind (§.4), Herr *Schering* (*Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen*, Göttinger Abhandlungen, Bd. 14.) ihre Zerlegung in elementare Gruppen, von deren Ordnungen jede durch die folgende theilbar (§.6). Jene Zerlegung ist eine völlig bestimmte, diese aber kann auf verschiedene Weisen ausgeführt werden. Diese Bemerkung bildete den Ausgangspunkt unserer Untersuchung, indem sie uns zu der Frage führte, ob es gewisse allen diesen Zerlegungen gemeinsame Eigenschaften gäbe. Wir erkannten zunächst, dass die Ordnungen der elementaren Gruppen, in die Herr *Schering* die ganze Gruppe zerlegt, constante von der Wahl der partialen Gruppen unabhängige Zahlen sind. Indem wir dann durch Combination der *Gauss*schen Zerlegung mit der *Schering*schen zu den unzerlegbaren Bestandtheilen der Gruppe vordrangen, gelang es uns weiter, mit Hilfe einer schärferen Fassung des Begriffs der primitiven Wurzeln (§.3) festzustellen, wie weit die irreductibeln Factoren einer Gruppe von einander unabhängig und wie weit sie abhängig sind.

Journal für Mathematik Bd. LXXXVI. Heft 3.

28

G. FROBENIUS, L. STICKELBERGER *Ueber Gruppen mit vertauschbaren Elementen*, J. Reine Angew. Math. 86, 217–262, 1878

Aufgabe 61 (Hom(–, –) für zyklische Gruppen)

Es sei R ein Ring und M, A, B, C sowie A_i für alle i in einer Indexmenge I , seien R -Moduln. Man rufe sich die folgenden Isomorphismen in Erinnerung:

- i) $\text{Hom}_R(R, M) \cong M$
- ii) $\text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} A_i, M) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(A_i, M)$
- iii) $\text{Hom}_R(M, \prod_{i \in I} A_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M, A_i)$

Seien nun p und q Primzahlen und n, m und $k, l \in \mathbb{N}$. Man bestimme

- a) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q^m\mathbb{Z})$
- b) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$

Aufgabe 62 (Kurze exakte Sequenzen und Freiheit)

Es sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln.

- Falls A und C frei sind, so ist auch B frei. Gilt auch die Umkehrung?
- Falls C frei ist, so spaltet die Sequenz und $B \cong A \oplus C$.

Aufgabe 63 (noethersch?)

Welcher der folgende \mathbb{Z} -Moduln sind noethersch?

- \mathbb{Q}
- \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
- $\mathbb{Z}[X]$
- $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Aufgabe 64 (Torsion)

Es sei R ein Integritätsbereich und M ein R -Modul. Ein Element $m \in M$ heißt Torsionselement, falls es ein $0 \neq r \in R$ gibt mit $rm = 0$.

- Die Menge aller Torsionselemente $T(M)$ bilden einen Untermodul von M .

Dieser Untermodul $T(M)$ wird als Torsion von M bezeichnet. Falls $T(M) = 0$ nennt man M torsionsfrei, falls $T(M) = M$ so nennt man M Torsionsmodul.

- Der Quotient $M/(T(M))$ ist torsionsfrei.
- Falls M frei ist, so ist M torsionsfrei.
- Man zeige, daß \mathbb{Q} und \mathbb{R} torsionsfrei sind, und daß \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ein Torsionsmodul ist, aber \mathbb{R}/\mathbb{Z} keiner ist.

***Aufgabe 65** (Erweiterungen)

Es sei R ein kommutativer Ring. Wir betrachten R -Moduln und R -Modulhomomorphismen. Ein Morphismus $\alpha = (\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C) : E \rightarrow E'$ zwischen zwei kurzen exakten Sequenzen

$$E : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad E' : 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} C' \longrightarrow 0$$

ist ein Tripel von R -Modulhomomorphismen $\alpha_A : A \rightarrow A'$, $\alpha_B : B \rightarrow B'$ und $\alpha_C : C \rightarrow C'$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_B & & \downarrow \alpha_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & B' & \xrightarrow{g} & C' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ein solcher Morphismus heißt Isomorphismus, falls α_A, α_B und α_C Isomorphismen sind.

Es sei

$$E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz und $c : C' \rightarrow C$ und $a : A \rightarrow A'$ Homomorphismen. Man zeige:

- Es gibt einen R -Modul $\text{PB}(E, c)$ und eine Abbildung $b : \text{PB}(E, c) \rightarrow B$ sowie eine exakte Sequenz

$$E' : 0 \longrightarrow A \longrightarrow \text{PB}(E, c) \longrightarrow C' \longrightarrow 0,$$

so daß (id_A, b, c) ein Morphismus von E' nach E ist.

- Es gibt einen R -Modul $\text{PO}(E, a)$ und eine Abbildung $b : B \rightarrow \text{PO}(E, a)$ sowie eine exakte Sequenz

$$E' : 0 \longrightarrow A' \longrightarrow \text{PO}(E, a) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

so daß (a, b, id_C) ein Morphismus von E nach E' ist.

(Man kann zeigen, daß die so konstruierten kurzen exakten Sequenzen eindeutig bis auf Isomorphie charakterisiert sind.)

Eine *Erweiterung von Y durch X* ist eine kurze exakte Sequenz

$$E : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0 .$$

Zwei Erweiterungen

$$E : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad E' : 0 \longrightarrow X \longrightarrow Z' \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

heißen äquivalent, wenn es einen Morphismus $z : Z \rightarrow Z'$ gibt, so daß $(\text{id}_X, z, \text{id}_Y)$ ein Morphismus von Sequenzen ist. (Dann ist nach dem 5er-Lemma z auch schon ein Isomorphismus.) Die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen wird mit $\text{Ext}(Y, X)$ bezeichnet. Wir schreiben $[E]$ für die Äquivalenzklasse einer Erweiterung E . Für zwei Erweiterungen E und E' wie oben betrachten wir

$$F : 0 \longrightarrow X \oplus X \longrightarrow Z \oplus Z' \longrightarrow Y \oplus Y \longrightarrow 0$$

und die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \Delta : Y \rightarrow Y \oplus Y & \text{sowie} & \mu : X \oplus X \rightarrow X \\ y \mapsto (y, y) & & (a, b) \mapsto a + b. \end{array}$$

Aus F erhalten wir (unter Benutzung von der Notation aus a) bzw. b)) zwei Erweiterungen

$$\begin{array}{l} E_1 : 0 \longrightarrow X \longrightarrow \text{PO}(\text{PB}(F, \Delta), \mu) \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \quad \text{und} \\ E_2 : 0 \longrightarrow X \longrightarrow \text{PB}(\text{PO}(F, \mu), \Delta) \longrightarrow Y \longrightarrow 0. \end{array}$$

c) Die Erweiterungen E_1 und E_2 sind äquivalent.

Wir definieren $[E] + [E']$ als $[E_1](=[E_2])$ und nennen $[E] + [E']$ die Baer-Summe von $[E]$ und $[E']$

d) Die Menge der Erweiterungen $\text{Ext}(Y, X)$ ist zusammen mit der Baer-Summe eine abelsche Gruppe mit der Äquivalenzklasse der Erweiterung

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota_1} X \oplus Y \xrightarrow{\pi_2} Y \longrightarrow 0$$

als neutralem Element.

e) Es sei $\alpha_X : X \rightarrow X$ bzw. $\alpha_Y : Y \rightarrow Y$ die Multiplikation mit $\alpha \in R$. Für eine Erweiterung E gilt dann

$$[\text{PB}(E, \alpha_Y)] = [\text{PO}(E, \alpha_X)].$$

f) Durch $\alpha.[E] := [\text{PB}(E, \alpha_Y)]$ ist eine R -Modulstruktur auf $\text{Ext}(Y, X)$ definiert.

Ich habe unlängst einen jungen Mathematiker, Eisenstein¹ aus Berlin, kennengelernt, der mit einem Empfehlungsschreiben von Humboldt hierher kam. Dieser noch sehr junge Mann zeigt *sehr* ausgezeichnetes Talent und wird gewiß Großes leisten.

Auszüge aus einem Brief von C.F. GAUSS an GERLING vom 14. Juni 1844