

# Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 12

Abgabe: Freitag, 21.1.2011

三人同行七十稀	五樹梅化廿一枝
七子團圓正半月	除百零五便得知
<i>san ren tong xing qi shi xi</i>	<i>wu shu mei hua nian yi zhi</i>
<i>qi zi tuan yuan zheng ban yue</i>	<i>chu bai ling wu bian de zhi</i>
Three <i>septuagenarians</i> in the same family? Rare!	
Five plum trees with <i>twenty one</i> branches in flower	
Seven brides in ideal union! <sup>185</sup>	
[It is] precisely the middle of the month! <sup>186</sup>	
One hundred and five subtracted? Lo the result appears! <sup>187</sup>	

Merkgedicht zur Lösung einer Aufgabe zu Resten von SUNZI in JEAN-CLAUDE MARTZLOFF, *A History of Chinese Mathematics*, Springer 1987, S. 161

## Aufgabe 56 (Exaktheit von $\text{Hom}_R(-, -)$ )

Es sei  $R$  ein Ring und  $A, B, C, M$  und  $N$  seien  $R$ -Moduln. Die Menge der  $R$ -Modulhomomorphismen  $\text{Hom}_R(M, N)$  ist ein  $R$ -Modul. Ein Homomorphismus  $f : A \rightarrow B$  induziert Homomorphismen

$$f^* : \text{Hom}_R(B, N) \rightarrow \text{Hom}_R(A, N) \quad \text{und} \quad f_* : \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B)$$

definiert durch

$$\phi \mapsto f^*(\phi) := \phi \circ f \quad \text{und} \quad \phi \mapsto f_*(\phi) := f \circ \phi.$$

Man zeige:

a) Die Sequenz

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn für alle  $R$ -Moduln  $N$  die Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(C, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(B, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(A, N)$$

exakt ist.

b) Die Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ist genau dann exakt, wenn für alle  $R$ -Moduln  $M$  die Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_R(M, C)$$

exakt ist.

c) Man finde  $A, B, N$  sowie einen Monomorphismus  $f : A \rightarrow B$  so daß  $f^* : \text{Hom}_R(B, N) \rightarrow \text{Hom}_R(A, N)$  kein Epimorphismus ist.

d) Man finde  $M, B, C$  sowie eine Epimorphismus  $g : B \rightarrow C$  so daß  $g_* : \text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C)$  kein Epimorphismus ist.

**Aufgabe 57** (Chinesischer Restsatz)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $I_1, \dots, I_n$  Ideale in  $R$  mit  $I_j + I_k = R$  für alle  $j \neq k$ . Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned}\chi : R &\rightarrow R/I_1 \times \cdots \times R/I_n \\ x &\mapsto (x + I_1, \dots, x + I_n).\end{aligned}$$

Man zeige:

- a)  $\chi$  ist ein Ringepimorphismus
- b) Der Kern von  $\chi$  ist  $I_1 \cap \cdots \cap I_n = I_1 \cdot I_2 \cdots I_n$ .

Man überlege wie man die Bedingungen an die Ideale im Fall  $R = \mathbb{Z}$  formulieren kann.

The *Sunzi suanjing* contains the following problem:

Suppose we have an unknown number of objects. If they are counted in threes, 2 are left, if they are counted in fives, 3 are left and if they are counted in sevens, 2 are left. How many objects are there?

Answer: 23.

Rule: If they are counted in threes, 2 are left: set 140. If they are counted in fives, 3 are left: set 63. If they are counted in sevens, 2 are left: set 30. Take the sum of these [three numbers] to obtain 233. Subtract 210 from this total; this gives the answer.

In general: For each remaining unit when counting in threes, set 70. For each remaining unit when counting in fives, set 21. For each remaining unit when counting in sevens, set 15. If [the sum obtained in this way] is 106 or more, subtract 105 to obtain the answer.<sup>12</sup>

According to these directives, the desired number is obtained by calculating:

$$70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 210 = 23. \quad (1)$$

23 is actually a solution of this problem. Moreover, the second part of the rule also indicates how to solve the same problem in the slightly more general case of arbitrary remainders  $r_1$ ,  $r_2$  and  $r_3$ . In this case, we must calculate:

$$x = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105n, \quad (2)$$

where  $r_1$ ,  $r_2$  and  $r_3$  denote the remainders when counting in threes, fives and sevens, respectively (i.e. on division by 3, 5, 7, respectively).

a.a.O. S.310f

**Aufgabe 58** (Körper und Freiheit)

Ein kommutativer Ring  $R$  mit  $1 \neq 0$  ist genau dann ein Körper, wenn jeder endlich erzeugte  $R$ -Modul frei ist.

**Aufgabe 59** (Moduln über Ringen und deren Quotienten)

Es sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul.

- Es sei  $A \subset R$  eine Teilmenge und  $I = \langle A \rangle$  das von  $A$  erzeugte Ideal. Gilt  $\alpha \cdot m = 0$  für alle  $\alpha \in A$ , so ist  $M$  ein  $R/I$ -Modul.
- Es seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_r : M \rightarrow M$  miteinander kommutierende Endomorphismen von  $M$ ; es sei  $A \subset R[x_1, \dots, x_r]$  und  $I = \langle A \rangle$  das von  $A$  erzeugte Ideal. Gilt  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = 0$  in  $\text{End}_R(M)$  für alle  $f \in A$ , so ist  $M$  ein  $R[x_1, \dots, x_r]/I$ -Modul.

**\*Aufgabe 60** (Reduktionskriterium)

Es seien  $R, S$  Integritätsbereiche und  $\phi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus. Dieser induziert einen Ringhomomorphismus

$$R[X] \rightarrow S[X]$$
$$f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^n \phi(a_i) X^i =: \phi(f),$$

den wir ebenfalls mit  $\phi$  bezeichnen. Es sei  $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X]$  mit  $a_n \neq 0$ .

Man zeige: Falls  $\phi(f)$  kein Produkt von nicht-konstanten Polynomen  $g_1, g_2 \in S[X]$  ist, dann ist  $f$  auch kein Produkt von nicht-konstanten Polynomen  $f_1, f_2 \in R[X]$ .

**Die Fachschaft informiert über die Semesterparty**

**Ort** N8Schicht Bonn

**Datum** 18.I.2011

**Uhrzeit** 22:00 Uhr

**VVK** beim AWD und 12.I.-14.I., jeweils 11-13 Uhr in der Poppensa

**und sonst so** Welcome-Klopfer solange der Vorrat reicht! Bier den ganzen Abend €1,50 und Erdbeerlimes bis Mitternacht für 'nen Euro