

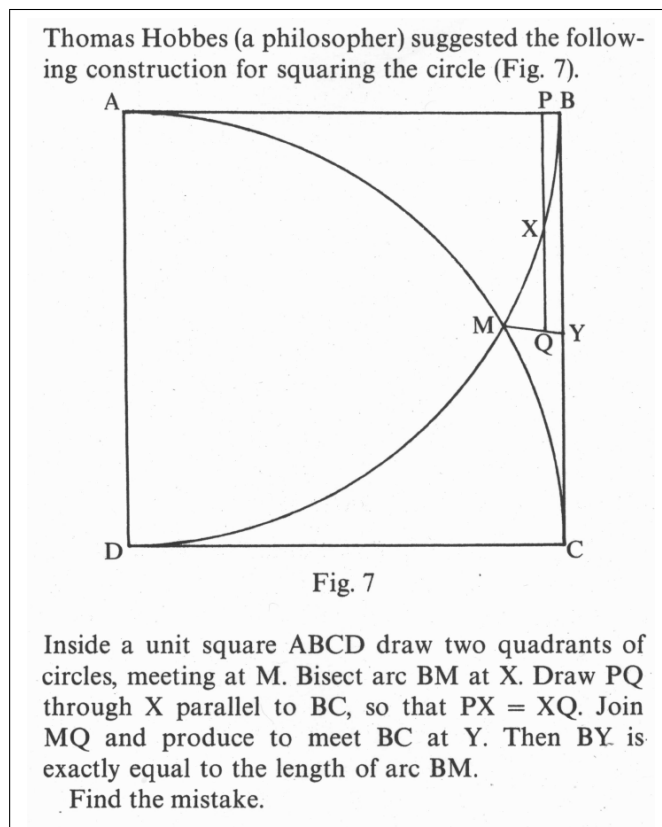
Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 11

Abgabe: Freitag, 14.1.2011



Eine Aufgabe aus *Galois Theory*, IAN STEWART, 1984, S.78. Hobbes' Beweisversuch findet sich in *De Corpore*, London 1655; ein Jahr später in englischer Übersetzung unter dem Titel *Six Lessons to the Professors of the Mathematics*.

Aufgabe 51 (Höhere Kommutatoruntergruppen und Auflösbarkeit)

Die höheren Kommutatoruntergruppen einer Gruppe G werden induktiv definiert als

$$K_0(G) := G$$

$$K_{n+1}(G) := K(K_n(G)),$$

wobei $K(G) = K_1(G) = [G, G]$ die Kommutatorgruppe der Gruppe G ist, d.h. die von allen Kommutatoren $[x, y]$ erzeugte Untergruppe. Man zeige:

a) Ist

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = \{1\}$$

eine Auflösungsreihe, dann gilt $G_i \supset K_i(G)$ für alle i . (*Hinweis*: Man beweise dies induktiv mit der Tatsache, daß $K(G) \subset H$, wenn G/H abelsch ist.)

b) Eine Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn $K_n(G) = \{1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 52 (Auflösbarkeit bleibt erhalten)

Es sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen. Man zeige: A und C sind genau dann auflösbar, wenn B auflösbar ist.

Aufgabe 53 (Auflösbarkeit von \mathfrak{S}_4)

Man bestimme alle Untergruppen der Ordnung 4 in der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_4 . Welche davon sind normal in \mathfrak{S}_4 ? Man zeige, daß \mathfrak{S}_4 auflösbar ist.

Aufgabe 54 (Euklidische Polynomringe)

Es sei R ein Integritätsbereich. Man zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind.

- i) R ist ein Körper.
- ii) $R[x]$ ist zusammen mit der Gradfunktion als Norm ein euklidischer Ring.
- iii) $R[x]$ ist ein Hauptidealring.

***Aufgabe 55** (Einfachheit von \mathfrak{A}_5)

Hinweis: Man überlege sich zuerst, daß a) ein Dreierzykel, b) zwei Zweierzykel, und c) ein Fünferzykel die einzig möglichen Zykeltypen der nicht-trivialen Elemente in \mathfrak{A}_5 sind. Alle von 20 Elemente von Typ a) sind konjugiert, alle 15 Elemente von Typ b) auch, aber die 24 Elemente vom Typ c) zerfallen in zwei Konjugationsklassen zu je 12 Elementen. Eine normale Untergruppe N muß eine Vereinigung von einigen dieser Konjugationsklassen sein; aber keine echte Teilsumme der Zahlen 1, 12, 12, 15 und 20 ergibt einen echten Teiler von 60 als Ordnung von N .

On Saturday I got M. Hobbes, *de Corpore*, in English²⁸¹; to which are added six Lessons²⁸² (as he calls them.) These I presently turned to; and, by the Epistle²⁸³ perceived, he had not onely attempted his own Justification, but also, among other things, the Confutation of your *Arith. Infin.* I then immediately searched for what concerned that Treatise, and found (according to my expectation) nothing but a farther manifestation of his own ignorance.

I may assure you that I am not deceived in him. And truly I now think, though he hath altered much²⁸⁴, you will find hee hath mended little. For in the same Lesson, pag. 52. (where he pretends to make good against you, his first quadrature of the Circle,) in the last line save one, he saith, *the triangles mnT, rcT, are alike and equall*; there being no such triangle as *rcT* (at lest, not terminated by any part of the line *ITV*.) unlesse *c* be in the line *ImTV*, that is, unlesse what he would prove (though it be false) be granted. Which is to beg the question; for this is that hee undertakes to prove. I have not had the leisure, and I think I shall hardly have the patience, to read more of him. &c.

Auszüge aus einem Brief von WILLIAM BRONCKER(?) an WALLIS vom 16/[26] Juni 1656 aus *Correspondence of John Wallis (1616-1703), Volume I*, P.BEELEY und C.SCRIBA, Oxford University Press 2003, S.187f.