

Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 10

Abgabe: Freitag, 7.1.2011

Die Untergruppen der freien Gruppen.

Von OTTO SCHREIER in Hamburg.

Eines der Probleme, zu denen jede vorgelegte Gruppe Anlaß gibt, ist die Bestimmung der Struktur aller in ihr enthaltenen Untergruppen. Mit dieser Fragestellung wollen wir uns hier beschäftigen, und zwar in der Hauptsache unter der Voraussetzung, daß die betrachtete Gruppe die aus irgendwelchen Erzeugenden aufgebaute freie Gruppe ist. Die Struktur gewisser Untergruppen der freien Gruppen ist bereits untersucht worden. Herr J. NIELSEN hat bewiesen, daß jede aus endlich vielen Elementen erzeugbare Untergruppe einer freien Gruppe bei passender Wahl ihrer Erzeugenden selbst wieder eine freie Gruppe ist¹⁾. Weitergehend hat Herr J. NIELSEN sogar ein finites Verfahren angegeben, um diese freien Erzeugenden aufzufinden. Sodann hat Herr E. ARTIN die Kommutatorgruppen der freien Gruppen untersucht. Es ergab sich wieder, daß die Kommutatorgruppe jeder freien Gruppe bei geeigneter Wahl ihrer Erzeugenden selbst eine freie Gruppe ist. Wir werden nun hier allgemein beweisen: *Jede Untergruppe einer freien Gruppe — sei sie durch endlich viele Elemente erzeugbar oder nicht, sei sie ausgezeichnet oder nicht — ist selbst bei geeigneter Wahl von erzeugenden Elementen frei.*

OTTO SCHREIER, Die Untergruppen der freien Gruppen. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 5, S. 161, 1927

Aufgabe 46 (Primfaktorenzerlegung und ggT und kgV)

Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich.

- Es seien $a, b \in R$. Die Elemente $\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b)$ und $a \cdot b$ sind zueinander assoziiert.
- Man bestimme $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$ in $R = \mathbb{R}[x]$ für

$$a(x) = x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \text{ und } b(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1.$$

- Man bestimme $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$ in $R = \mathbb{Z}[i]$ für

$$a = 5 - 12i \text{ und } b = 1 + 8i$$

Aufgabe 47 (Lokalisieren an einem Primideal)

Es sei p eine Primzahl. Für eine ganze Zahl x sei $\nu_p(x)$ die maximale Potenz, in der p die Zahl x teilt. Man betrachte die folgende Teilmenge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \mid \nu_p(x) \geq \nu_p(y) \right\}.$$

- Man zeige, daß $\mathbb{Z}_{(p)}$ ein Unterring von \mathbb{Q} ist.
- Man finde eine multiplikative Teilmenge $S \subset \mathbb{Z}$, so daß $S^{-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$.
- Man zeige, daß $\mathbb{Z}_{(p)}$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 48 (p-adische Zahlen)

Es sei p eine Primzahl. Die p-adischen ganzen Zahlen \mathbb{Z}_p sind der Ring

$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_k \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$$

wobei $\mathbb{Z}/p^{k+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ die kanonische Quotientenabbildung ist.

- a) Ein $x \in \mathbb{Z}_p$ läßt sich als Folge (x_n) auffassen, wobei $x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$x_{n+1} \equiv x_n \pmod{p^n}.$$

Ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt eine solche Folge durch $x_n := z \pmod{p^n}$.

- b) Man bestimme die Einheiten in \mathbb{Z}_p .
 c) Ist \mathbb{Z}_p nullteilerfrei?

Die p-adischen Zahlen \mathbb{Q}_p sind der Quotientenkörper der p-adischen ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Q}_p := \text{Quot}(\mathbb{Z}_p).$$

- d) Für $S := \{p^n | n \in \mathbb{N}\}$ zeige man $\mathbb{Q}_p \cong S^{-1}\mathbb{Z}_p$

Aufgabe 49 (Lokalisierungen mit Beispielen)

Es sei R ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge.

- a) Falls $S = \{1\}$, so ist $S^{-1}R \cong R$.
 b) Es gilt $0 \in S$ genau dann, wenn $S^{-1}R$ der Nullring ist.
 c) Es sei nun $A = R \times R'$ das Produkt von zwei Ringen. Man zeige, daß R isomorph zu einer Lokalisierung von A ist, d.h. $R \cong T^{-1}(R \times R')$ für ein geeignetes $T \subset A$.
 d) Man bestimme $S^{-1}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ für i) $S = \{3\}$, ii) $S = \{4\}$ und iii) $S = \{1, 2, 4\}$.

***Aufgabe 50** (Kantenweggruppe und der Satz von Nielsen-Schreier)

Zunächst erinnern wir nochmal an die Aufgabe 15. Es sei $\Gamma = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten. Wir definieren eine Strecke als ein Tripel $s = (\alpha(e), e, \omega(e))$, wobei $e \in E$ und $\alpha(e)$ und $\omega(e)$ Knoten der Kante e sind. Zu einer Strecke $s = (\alpha(e), e, \omega(e))$ sei die inverse Strecke $\bar{s} = (\omega(e), e, \alpha(e))$. Ein Weg in Γ eine endliche Folge $p = s_1 \dots s_k$, von Strecken $s_i = (\alpha(e_i), e_i, \omega(e_i))$, so daß $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ für $1 \leq i < k$. Der Anfang eines Weges $p = s_1 \dots s_k$ ist $\alpha(e_1)$, das Ende $\omega(e_k)$. Eine elementare Transformation eines Weges p ist ein Weg der durch Einfügung oder Kürzung von $s\bar{s}$, wobei s eine Strecke sei, an beliebiger Stelle in der endlichen Folge entsteht. Wir fixieren einen Knoten v und betrachten $P(\Gamma, v)$, die Menge aller Wege mit Anfang und Ende v . Zwei Wege $p, q \in P(\Gamma, v)$ heißen homotop, falls man p aus q mit Hilfe von elementaren Transformationen bekommen kann. Man zeige:

- 15 a) $p \simeq q \Leftrightarrow$ "p und q sind homotop" ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen werden auch Homotopieklassen genannt.
 15 b) Die Menge $\pi(\Gamma, v) := P(\Gamma, v) / \simeq$ von Homotopieklassen ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation

$$[p][q] \mapsto [pq],$$

wobei pq die Konkatenation von endlichen Folgen bezeichnet. Diese Gruppe heißt Kantenweggruppe von Γ bezüglich v .

- 15 c) Sei w ein weiterer Knoten. Dann gibt es einen Isomorphismus $\pi(\Gamma, v) \cong \pi(\Gamma, w)$.
 15 d) Die Kantenweggruppe $\pi(\Gamma, v)$ ist frei. (Hinweis: Man betrachte einen aufspannenden Baum).

Es seien $\Gamma = (V, E)$ und $\Gamma' = (V', E')$ zusammenhängende Graphen. Eine Abbildung $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ von Graphen ist eine Funktion $\phi : V \rightarrow V'$, so daß $\phi(e) := \{\phi(v), \phi(w)\}$ eine Kante in Γ' ist, falls $\{v, w\} \in E$ eine Kante in Γ . (N.b.: Die Funktion ϕ ist nicht notwendiger Weise injektiv und kann auch beide Knoten einer Kante in Γ auf einen Knoten in Γ' abbilden.) Eine Abbildung von Graphen ist ein Isomorphismus, falls ϕ eine Bijektion ist, deren Inverses wieder eine Abbildung von Graphen ist. Ein einfaches Beispiel für einen Isomorphismus ist die Identität $1_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$.

a) Für eine weitere Abbildung von Graphen $\phi' : \Gamma' \rightarrow \Gamma''$ ist die Komposition $\phi' \circ \phi : \Gamma \rightarrow \Gamma''$ wieder eine Abbildung von Graphen.

Es sei $s = (\alpha(e), e, \omega(e))$ eine Strecke in Γ . Wir setzen $\phi(s) := (\phi(\alpha(e)), \phi(e), \phi(\omega(e)))$. Es sei $p = s_1 \dots s_k$ ein Weg in Γ .

b) Man zeige, daß $\phi(p) := \phi(s_1) \dots \phi(s_k)$ ein Weg in Γ' ist.

c) Für einen Basisknoten v ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_{\#} : \pi(\Gamma, v) &\rightarrow \pi(\Gamma', \phi(v)) \\ [p] &\mapsto [\phi(p)] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

d) Für ϕ und ϕ' wie oben gilt

$$(\phi' \circ \phi)_{\#} = \phi'_{\#} \circ \phi_{\#} : \pi(\Gamma, v) \rightarrow \pi(\Gamma'', \phi'(\phi(v)))$$

und $(1_{\Gamma})_{\#} = 1_{\pi(\Gamma, v)}$.

Es sei $\phi : \Gamma = (V, E) \rightarrow \Gamma' = (V', E')$ eine Abbildung von Graphen und $\Delta = (V_{\Delta}, E_{\Delta}) \subset \Gamma'$ ein Untergraph. Wir definieren

$$\phi^{-1}(\Delta) = (\phi^{-1}(V_{\Delta}), \phi^{-1}(E_{\Delta}))$$

wobei

$$\phi^{-1}(V_{\Delta}) = \{v \in V \mid \phi(v) \in V_{\Delta}\}$$

und

$$\phi^{-1}(E_{\Delta}) = \{e \in E \mid \phi(e) \in E_{\Delta}\}.$$

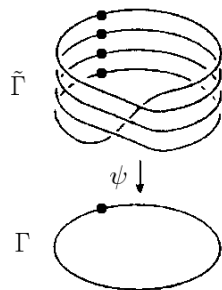
Eine Überlagerung eines Graphen Γ ist ein zusammenhängender Graph $\tilde{\Gamma}$ zusammen mit einer Abbildung $\psi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, so daß für jeden Knoten v und jede Kanten e im Γ die Urbilder $\psi^{-1}(v)$ bzw. $\pi^{-1}(e)$ disjunkte Vereinigungen von Knoten bzw. Kanten sind von der Form

$$\psi^{-1}(v) = \bigcup_{i \in I} \tilde{v}_i \quad \text{bzw.} \quad \psi^{-1}(e) = \bigcup_{i \in I} \tilde{e}_i,$$

$\tilde{v}_i \in \tilde{V}, \tilde{e}_i \in \tilde{E}$ für eine Indexmenge I und

$$p|_{\tilde{e}_i} : \tilde{e}_i \rightarrow e_i$$

ist ein Isomorphismus von Graphen (die nur aus einer Kante bestehen). Im folgenden sei $\psi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ eine Überlagerung und \tilde{v} ein Knoten in $\tilde{\Gamma}$ mit $\psi(\tilde{v}) = v$ für einen Knoten v in Γ .



Eine Überlagerung

e) Es sei p ein Weg in Γ mit Anfang v . Dann gibt es genau einen Weg \tilde{p} in $\tilde{\Gamma}$ mit Anfang \tilde{v} und $\psi(\tilde{p}) = p$. Wir nennen den Weg \tilde{p} „Hochhebung“ des Weges p .

f) Falls p und q homotope Wege in Γ mit Anfang v , so sind die Hochhebungen \tilde{p} und \tilde{q} homotop und haben gleiches Ende.

g) Die Abbildung $\psi_{\#} : \pi(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}) \rightarrow \pi(\Gamma, v)$ ist injektiv. Das Bild von $\psi_{\#}$ bezeichnen wir mit $\psi_{\#}(\pi(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}))$; es ist eine Untergruppe in $\pi(\Gamma, v)$.

h) Für einen weiteren Knoten \tilde{w} mit $\psi(\tilde{w}) = v$ sind die beiden Untergruppen $\psi_{\#}(\pi(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}))$ und $\psi_{\#}(\pi(\tilde{\Gamma}, \tilde{w}))$ zueinander konjugiert.

i) Falls umgekehrt $H \subset \pi(\Gamma, v)$ eine zu $\psi_{\#}(\pi(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}))$ konjugierte Untergruppe ist, so ist $H = \psi_{\#}(\pi(\tilde{\Gamma}, \tilde{w}))$ für ein \tilde{w} mit $\psi(\tilde{w}) = v$.

Man betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(v) \times \pi(\Gamma, v) &\rightarrow \psi^{-1}(w) \\ (\tilde{x}, p) &\mapsto \omega(\tilde{p}_x) \end{aligned}$$

wobei \tilde{p}_x die Hochhebung von p mit Anfang x bezeichnet und $\omega(\tilde{p}_x)$ das Ende dieses Weges.

j) Die Abbildung ist eine wohldefinierte Operation der Gruppe $\pi(\Gamma, v)$ auf $\psi^{-1}(v)$ von rechts.

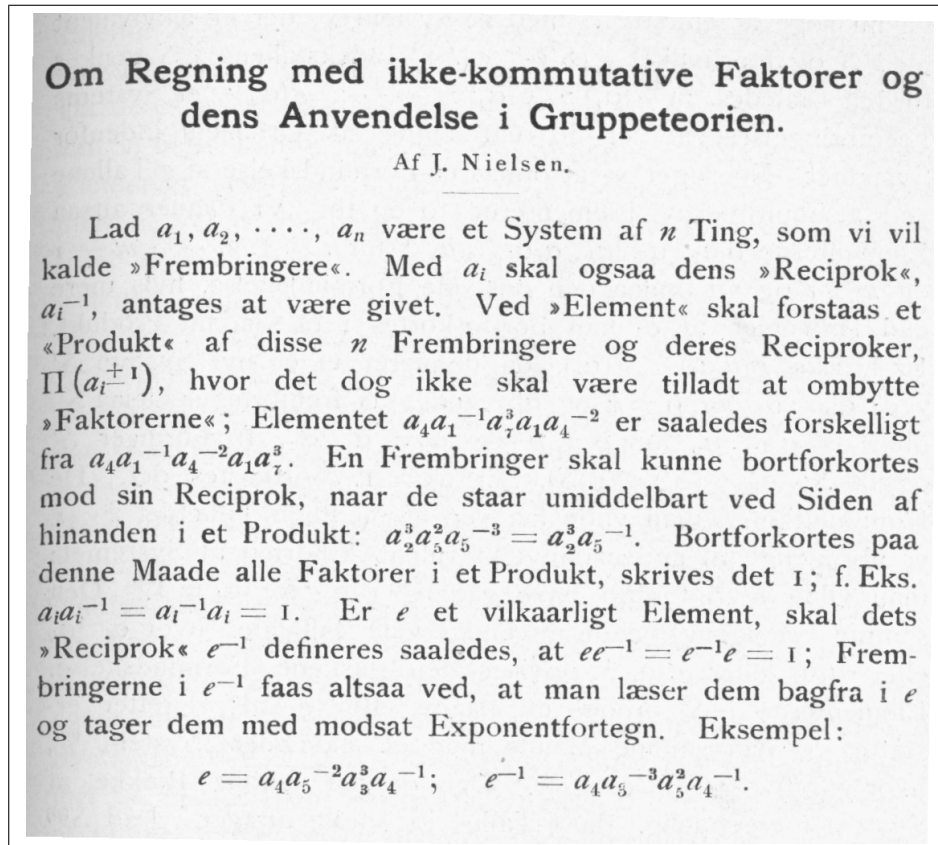
k) Die Operation ist transitiv.

l) Der Stabilisator von $\tilde{v} \in \psi^{-1}(v)$ ist $\psi_{\#}(\pi(\tilde{\Gamma}, \tilde{v}))$.

Satz von Nielsen-Schreier: Jede Untergruppe H einer freien Gruppe F ist frei.

m) Man beweise den Satz von Nielsen-Schreier unter Benutzung des folgenden Lemmas, welches hier nicht bewiesen werden soll.

Lemma: Es sei Γ ein zusammenhängender Graph mit Basisknoten v . Falls $H \subset \pi(\Gamma, v)$ eine Untergruppe, dann gibt es eine Überlagerung $\pi : \Gamma_H \rightarrow \Gamma$ mit $\psi_{\#}(\pi(\Gamma_H, \tilde{w})) = H$.



JAKOB NIELSEN, Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien. In: *Math. Tidsskrift B*, S. 78, 1921