

# Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 9

Abgabe: Freitag, 17.12.2010

**J<sub>1</sub>**

Sporadic Janko group  $J_1$

Order = 175,560 =  $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$  Mult = 1 Out = 1

**Constructions**

**Janko**  $G$  is a subgroup of  $O_3(11)$ : In the 3-space of pure imaginary Cayley numbers over  $F_{11}$ , spanned by  $i_k$  (subscripts mod 7),  $G$  may be generated by the elements

$$F : i_k \rightarrow i_{k+1} \quad G : i_k \rightarrow i_{2k} \quad H : i_k \rightarrow 2i_k \quad (i \text{ for } 0,3,5,6)$$

$$S : i_k \rightarrow -2i_{k-1} + (i_{1+k}i_{2+k}i_{k+4}i_{k+5}) + 3(i_{1+k}i_{2+k}i_{k+4}i_{k+5}i_{k+6})$$

In the corresponding projective 6-space there is an orbit of 1596 (isotropic) "Whitelaw points" each lying in two out of 266 normal sextic curves of 12 such points.

**Graph**  $G$ : the automorphism group of an 11-valent graph on 266 points in which the point stabilizer is  $O_3(11)$  and the suborbits have size 1 (distance 0), 11 (distance 1), 110 (distance 2), 132 (distance 3) and 12 (distance 4, or opposite). There are 11 involutions (indicated by superscripts  $i,j$ ) from  $\{0,1,2,\dots,8,5,3\}$ , the involution 0 being DBCD below. In these terms the 266 points can be written  $P(1), P^2(1), P^{3+4}(110), Q_x(12),$  and  $Q_x^i(132)$ , for  $x = \infty, 0, 1, \dots, 6, 7$ ;  $P$  is joined to  $P^3$  and opposite to  $Q_x$ . The group is generated by the elements

$$A : t \rightarrow t+1, B : t \rightarrow 3t \text{ on } \{1,2,4$$

$$C : (2X)(3Y)(5Z)(9) \text{ on } \{1,2\}, \text{ and } (\infty 0)(1X)(25)(37)(48)(69) \text{ on } x$$

$$D : (p^k t + q, Q_{x+5q-t}) (p^k t - q, p^{k+1} t - q) (Q_x^i t + q, p^{3k+1} q - t) (Q_x^{i-1} t - q, Q_{x-2q}^{i-1} t - 3q)$$

$$(P, Q_\infty) (P^2, Q_{11} t^{-5}) (Q_1, Q_{30}^{-5}), (t = 0, 1, \dots, 9, 7, q = 1, 3, 4, 5, 9)$$

**Orthogonal (2)** In the 20-space over  $F_2$  of vectors  $v = \sum x_i e_i + \sum y_i f_i$  (subscripts mod 11) with  $\sum x_i = \sum y_i = 0$  and invariant quadratic form  $Q(v) = \sum x_i y_i$ , the above generators act as follows:

$$A : e_k \rightarrow e_{k+1}, \quad f_k \rightarrow f_{k+1}$$

$$B : e_k \rightarrow e_{3k}, \quad f_k \rightarrow f_{3k}$$

$$C : e_0 \rightarrow e_0, \quad f_0 \rightarrow f_0 + e_0^2, \quad \text{where } e_i^2 = \sum x_j (i \neq j)$$

$$e_k \rightarrow e_{1/k}, \quad f_k \rightarrow f_{1/k} + e_0 + e_{3/k} + e_{4/k} + e_{5/k} \quad (k = 1, 3, 4, 5, 9)$$

$$e_k \rightarrow e_{9/k}, \quad f_k \rightarrow f_{9/k} + e_0 + e_{3/k} + e_{4/k} + e_{5/k} + e_{7/k} + e_{8/k} \quad (k = 2, 6, 7, 8, 10)$$

$$D : e_k \rightarrow e_{-k}, \quad f_k \rightarrow e_{-k}$$

**Presentation**  $G = \langle a, b, c, d, e, f \mid (abc)^2 = 1, (cde)^2 = a \rangle$

**Remark**:  $G$  is the centralizer in the O'Man group of an outer automorphism of order 2.

Maximal subgroups			Specifications				
Order	Index	Structure	Character	Abstract	Graph	Janko	Orthogonal (2)
650	266	$L_2(11)$	1a+56ab+76ac+77a		point	sextic curve	10-space: $1e[1]$
168	1045	$2^3:7:3$		$N(2A^3)$		base: $\{1z\}$	
120	1463	$2 \times A_5$		$N(2A)$	edge		point: $e_0^2$
114	1540	19:15		$N(19ABC)$		non-isotropic point	
110	1596	11:10		$N(11A)$	opposite points	Whitelaw point	base: $\{e_1, f_1^2\}$
60	2920	$D_6 \times D_{10}$		$N(3A), N(5AB)$	pentagon	non-isotropic point	point
42	4180	7:6		$N(7A)$		non-isotropic point	point: $\{1111111\}$

```

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
175560 120 30 30 30 6 7 10 10 11 15 15 19 19 19
p power A A A AA A BA AA A BA AA A A A
p part A A A AA A AA BA A AA BA A A A
ind 1A 2A 3A 5A 7A 6A 7A 10A 8A 11A 15A 8A 19A 3A2 C4A
x1 = 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
x2 = 56 0 2-265 0 0 0 0 0 1 65 0 -1 -1 -1 -1
x3 = 56 0 2 0 -265 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
x4 = 76 4 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 0 0 0
x5 = 76 -4 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 1 0 0 0
x6 = 77 5 -1 2 2 -1 0 0 0 0 0 -1 1 1 1 1
x7 = 77 -3 2 65 0 0 0 65 0 0 65 0 7 1 1 1
x8 = 77 -3 2 0 65 0 0 0 65 0 0 65 1 1 1 1
x9 = 120 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 c19 #2 #4
x10 = 120 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 #19 #2
x11 = 120 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 #2 #4 c19
x12 = 133 5 1 -2 -1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
x13 = 133 -3 -2 -65 0 0 0 65 0 1 -65 0 0 0 0
x14 = 133 -3 -2 0 -65 0 0 0 65 1 0 -65 0 0 0
x15 = 209 1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 0 -1 -1 0 0 0

```

1361

Der Eintrag zu der ersten Janko-Gruppe aus *The atlas of finite groups*, S.36

## Aufgabe 41 ( $D_{10}$ und andere Gruppen der Ordnung 20)

Wir betrachten die Diedergruppe  $D_{10}$ , die Isometriegruppe eines regelmäßigen Zehnecks. Die 10 Spiegelungen seien mit  $\sigma_1, \dots, \sigma_{10}$  bezeichnet und die Drehungen seien von  $\rho$  erzeugt.

- Für  $p = 2$  bzw.  $p = 5$  bestimme man die Anzahl  $n_p$  der  $p$ -Sylowuntergruppen.
- Man bestimme Struktur dieser Untergruppen, das heißt man finde einen Isomorphismus zu einer bekannten Gruppe.

c) Man zeige, daß jede Gruppe der Ordnung 20 eine normale Untergruppe enthält.

**Aufgabe 42** ( $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ )

Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{m + i\sqrt{5}n \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

zusammen mit der Norm

$$N(m + i\sqrt{5}n) := m^2 + 5n^2.$$

- a) Die Menge  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  ist ein Unterring von  $\mathbb{C}$
- b) Die Norm erfüllt  $N(ab) = N(a)N(b)$  für  $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .
- c) Man bestimme alle Elemente  $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  mit  $N(x) \in \{1, 3, 7, 9, 21\}$ .
- d) Man zeige, daß  $6 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  auf zwei verschiedene Arten als Produkt von zwei irreduziblen Faktoren dargestellt werden kann.
- e) Man finde ein Element in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ , welches irreduzibel, aber nicht prim ist.
- f) Ist der Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  i) faktoriell, ii) euklidisch, iii) ein Hauptidealring?

**Aufgabe 43** (Radikal)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I \subset R$  ein Ideal. Das Radikal  $\sqrt{I}$  von  $I$  ist die Menge der  $x \in R$  mit  $x^n \in I$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Die Teilmenge  $\sqrt{I} \subset R$  ist ein Ideal.
- b) Es gilt  $I \subset \sqrt{I}$ .
- c) Es gilt  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
- d) Ist  $\mathfrak{p} \subset R$  ein Primideal, so ist  $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ .

**Aufgabe 44** (Lokalisieren und Primideale)

Es sei  $R$  ein Integritätsbereich und  $S \subset R$  eine multiplikative Teilmenge mit  $1 \in S$ .

- a) Sei  $\mathfrak{p} \subset R$  ein Primideal mit  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ . Man zeige, daß das vom Bild von  $\mathfrak{p}$  in  $S^{-1}R$  erzeugte Ideal  $S^{-1}\mathfrak{p}$  ein Primideal ist und

$$S^{-1}\mathfrak{p} = \left\{ \frac{p}{s} \mid p \in \mathfrak{p}, s \in S \right\}.$$

- b) Jedes Ideal in  $S^{-1}R$  ist von dieser Form.
- c) Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Primideale  $\mathfrak{p} \subset R$  mit  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  und der Menge der Primideale in  $S^{-1}R$ .
- d) Der Ring  $S^{-1}R$  ist ein Hauptidealring, wenn  $R$  ein Hauptidealring ist.

**\*Aufgabe 45** Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe mit endlicher Ordnung  $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  für paarweise verschiedene Primzahlen  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Für eine Primzahl  $p$  ist der  $p$ -Torsionsanteil die Menge

$$S(p) := \{g \in G \mid \exists s : g^{(p^s)} = e\}.$$

- a) Die Menge  $S(p)$  ist eine Untergruppe. (Dies gilt im Allgemeinen nicht, wenn  $G$  nicht abelsch.)
- b) Die Gruppe  $G$  ist das direkte Produkt ihrer Sylow-Untergruppen.

Hinweis: Man benutze Aufgabe 33.

**Tabelle kleiner Gruppen** (deren Ordnung keine Primzahl ist):

Ordnung	abelsche Gruppen	nicht abelsche Gruppen
4	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, V \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong D_2$	
6	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$S_3 \cong D_3$
8	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$D_4, Q_8$
9	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	
10	$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	$D_5$
12	$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$D_6 \cong D_3 \times \mathbb{Z}_2, A_4, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
14	$\mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$	$D_7$
15	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	