

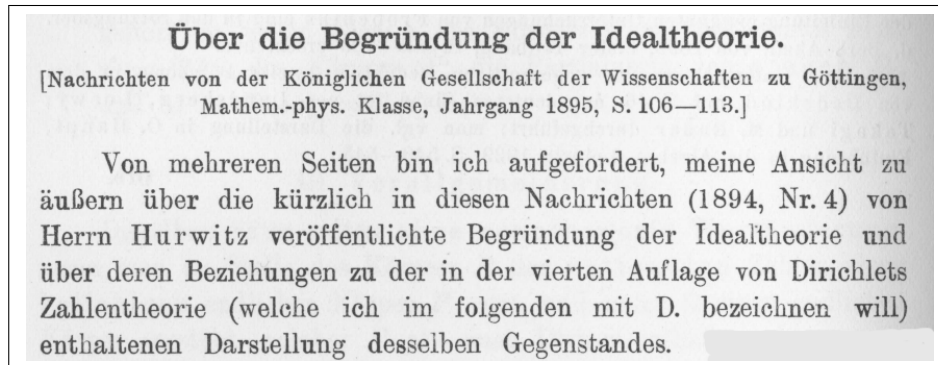
Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 8

Abgabe: Freitag, 10.12.2010



R. DEDEKIND „Über die Begründung der Idealtheorie“ aus *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-phys. Klasse, S. 106, 1895*

Aufgabe 36 (Universelle Eigenschaft von Polynomringen)

Es sei X eine Menge, R ein kommutativer Ring mit Eins und $f : X \rightarrow R$ eine Funktion. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus

$$F : \mathbb{Z}[X] \rightarrow R$$

mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in X$, d.h. $F \circ \iota = f$, wenn $\iota : X \rightarrow \mathbb{Z}[X]$ die Inklusion ist.

Aufgabe 37 (Gruppenringe)

Es sei G eine Gruppe und die Menge $X = \{x_g \mid g \in G\}$ bestehe aus den Symbolen x_g für $g \in G$. Der Gruppenring $\mathbb{Z}G$ von G ist definiert als

$$\mathbb{Z}G := \mathbb{Z}[X]/I,$$

wobei I das Ideal ist, welches von allen Relationen $x_g x_h = x_{gh}$, für alle $g, h \in G$, erzeugt wird.

- Falls G auf der abelschen Gruppe M durch Gruppenautomorphismen ρ_g operiert, gibt es einen Ringhomomorphismus $F : \mathbb{Z}G \rightarrow \text{End}(M)$ mit $F(x_g) = \rho_g$.
- Für $G = \mathbb{Z} = \langle x \rangle$ ist $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$, dem Laurentpolynomring in einer Variablen x .
- Für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle x \mid x^n = 1 \rangle$ ist $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$.

Aufgabe 38 (Ringe und Ideale)

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

- Der Ring R ist genau dann ein Körper, wenn er keine echten Ideale enthält, das heißt keine Ideale außer $\{0\}$ und R .
- Es sei $a \in R$ ein nilpotentes Element, das heißt es gibt eine natürliche Zahl n mit $a^n = 0$. Dann ist das Element $1 - a$ invertierbar in R .
- Das Ideal (X^2, X^3) im Ring $R = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f'(0) = 0\} \subset \mathbb{R}[X]$ ist kein Hauptideal.

Aufgabe 39 (Operationen mit Idealen)

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Für eine Teilmenge M von R bezeichne (M) das von M erzeugte Ideal, das heißt das kleinste Ideal in R , welches M enthält. Für Ideale I und J in R sei

$$I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

und

$$I \cdot J := (\{x \cdot y \mid x \in I, y \in J\})$$

Es seien I, J und K Ideale in R .

- $I + J$ ist ein Ideal in R .
- Es gilt $I + J = (I \cup J)$.
- Es gilt $I \cdot J \subset I \cap J$.
- Die Gleichheit $I + J = R$ impliziert $I \cdot J = I \cap J$.
- Man finde einen Ring R und Ideale I, J in R , so daß $I \cdot J \neq I \cap J$.
- Es gilt $I \cdot (J + K) = I \cdot J + I \cdot K$ (und $(J + K) \cdot I = J \cdot I + K \cdot I$).
- Für eine endliche Teilmenge $M = \{r_1, \dots, r_k\}$ von R ist das von M erzeugte Ideal gegeben durch

$$(r_1, \dots, r_k) = \{x_1 \cdot r_1 + \dots + x_k \cdot r_k \mid x_1, \dots, x_k \in R\}$$

*Aufgabe 40 (Isomorphiesatz)

Es sei $\varphi : R \rightarrow R'$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Es sei I' ein Ideal in R' und $I := \varphi^{-1}(I')$ das Urbild von I' in R .

- Die Teilmenge I ist ein Ideal in R .
- Die Zuordnung $I' \mapsto I = \varphi^{-1}(I')$ erklärt eine Bijektion zwischen den Idealen in R' und denjenigen Idealen in R , welche den Kern von φ enthalten.
- Es gibt einen natürlichen Isomorphismus der Quotientenringe $R/I \cong R'/I'$.
- Das Ideal I' ist genau dann ein Primideal in R' , wenn I ein Primideal in R ist.
- Es sei das Ideal I' maximal in R' . Ist dann sein Urbild I ein maximales Ideal in R ?

Hiermit komme ich zum letzten Teile meiner Erzählung. Ich erinnere zunächst an eine schöne Stelle der Disquisitiones Arithmeticae, die schon in meiner Jugend den tiefsten Eindruck auf mich gemacht hat. Im Art. 76 berichtet Gauß, daß der Wilsonsche Satz zuerst von Waring bekanntgemacht ist, und fährt fort: Sed neuter demonstrare potuit, et cel. Waring fatetur demonstrationem eo difficiliorem videri, quod nulla notatio fingi possit, quae numerum primum exprimat. — At nostro quidem iudicio hujusmodi veritates ex notionibus potius quam ex notationibus hauriri debebant. — In diesen letzten Worten liegt, wenn sie im allgemeinsten Sinne genommen werden, der Ausspruch eines großen wissenschaftlichen Gedankens. die Entscheidung für das Innerliche im Gegensatz zu dem Äußerlichen. Dieser Gegensatz wiederholt sich auch in der Mathematik auf fast allen Gebieten;