Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 7 Abgabe: Freitag, 3.12.2010

> **Théorèmes sur les groupes de substitutions.**
>
> Par M. L. Sylow à Frederikshald en Norvege.
>
> On sait que si l'ordre d'un groupe de substitutions est divisible par le nombre premier n, le groupe contient toujours une substitution d'ordre n. Ce théorème important est contenu dans un autre plus général que voici: „Si l'ordre d'un groupe est divisible par n^α, n étant premier, le groupe contient un faisceau partiel d'ordre n^α". La démonstration même du théorème fournit quelques autres propriétés générales des groupes de substitutions. J'y ajouterai encore quelques propositions moins générales qui s'y ratachent ou qui en écoulent, dont quelques unes pourtant sont déjà connues par un travail de M. E. Mathieu.

M. L. Sylow, *„Théorèmes sur les groupes de substitutions."* Math. Ann. 5 (1872), no. 4, S. 584

Aufgabe 31 (Konjugationsklassen)

Sei G eine endliche Gruppe, $x \in G$ und $H \subset G$ eine Untergruppe.

a) Die Konjugationsklasse von x hat genau $[G : Z_G(x)] = |G|/|Z_G(x)|$ Elemente.

b) Die Konjugationsklasse von H hat genau $[G : N_G(H)] = |G|/|N_G(H)|$ Elemente.

c) Es sei c die Anzahl der Konjugationsklassen von G. Man zeige

$$c = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Z_G(g)|.$$

d) Wenn G genau zwei Konjugationsklassen hat, so gilt $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

*Zusatz: Es sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$ mit Zykeltyp $t(\pi) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Man beschreibe $Z_{\mathfrak{S}_n}(\pi)$ und bestimme $|Z_{\mathfrak{S}_n}(\pi)|$.

Aufgabe 32 (Fixpunkte unter Wirkung von p-Gruppen)

a) Es sei G eine p-Gruppe, $|G| = p^n$ und X sei eine endliche G-Menge mit $p \nmid |X|$. Dann gibt es einen Fixpunkt.

b) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum und $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ mit $|G| = p^n$. Dann gibt es einen von null verschiedenen Fixvektor unter G.

Aufgabe 33 (Direkte Sylow-Zerlegung)

Es sei G eine endliche Gruppe mit genau einer p-Sylow-Untergruppe S_p für jede Primzahl p, die $|G|$ teilt. Dann gilt

$$G \cong \prod_p S_p.$$

Beispiel: $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 34 (Normale und p-Sylow-Untergruppen)

Es sei G endlich, $P \subset G$ eine p-Sylow-Untergruppe und $H \triangleleft G$ eine normale Untergruppe.

a) $P \cap H$ ist eine p-Sylow Untergruppe von H.

b) HP/H ist eine p-Sylow-Untergruppe von $Q = G/H$.

***Aufgabe 35** (Bilder unsicher aufhängen)

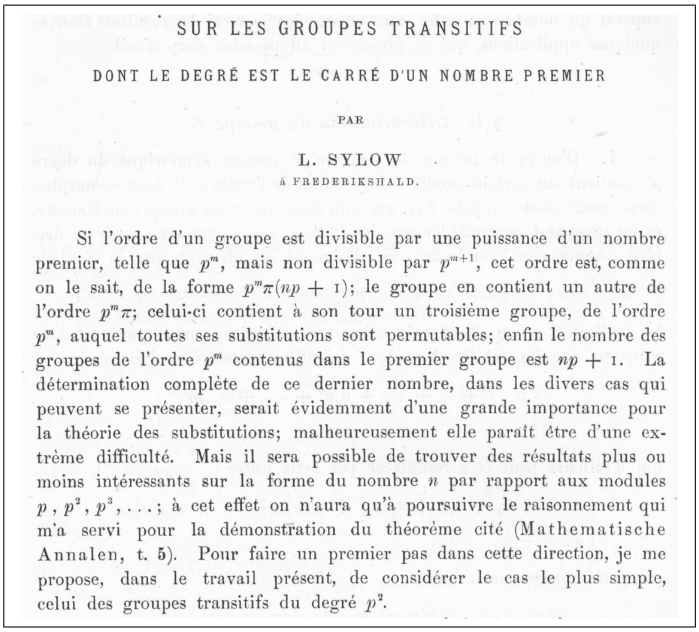
Wir betrachten $\mathrm{Fr}(n) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ zusammen mit Homomorphismen

$$r_j : \mathrm{Fr}(n) \to \mathrm{Fr}(n-1) = \langle a_1, \ldots \widehat{a_j}, \ldots, a_n \rangle$$
$$a_i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ a_i & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

a) Man finde ein Element $1 \neq x \in \mathrm{Fr}(n)$, so daß $r_j(x) = 1$ für alle j. (Hinweis: wie könnte man einen Kommutator von mehr als zwei Elementen definieren?)

Ist es möglich, ein Bild so an n Nägeln mit einer Schnur aufzuhängen, daß es herunterfällt, wenn man einen beliebigen Nagel hinauszieht? Man zeichne eine solche Anordnung von Schnur, Nägeln und Bild für den Fall $n = 2$.

$\otimes$ $\otimes$



SUR LES GROUPES TRANSITIFS

DONT LE DEGRÉ EST LE CARRÉ D'UN NOMBRE PREMIER

PAR

L. SYLOW

À FREDERIKSHALD.

Si l'ordre d'un groupe est divisible par une puissance d'un nombre premier, telle que p^m, mais non divisible par p^{m+1}, cet ordre est, comme on le sait, de la forme $p^m\pi(np+1)$; le groupe en contient un autre de l'ordre $p^m\pi$; celui-ci contient à son tour un troisième groupe, de l'ordre p^m, auquel toutes ses substitutions sont permutables; enfin le nombre des groupes de l'ordre p^m contenus dans le premier groupe est $np+1$. La détermination complète de ce dernier nombre, dans les divers cas qui peuvent se présenter, serait évidemment d'une grande importance pour la théorie des substitutions; malheureusement elle paraît être d'une extrême difficulté. Mais il sera possible de trouver des résultats plus ou moins intéressants sur la forme du nombre n par rapport aux modules $p, p^2, p^3, \ldots$; à cet effet on n'aura qu'à poursuivre le raisonnement qui m'a servi pour la démonstration du théorème cité (Mathematische Annalen, t. 5). Pour faire un premier pas dans cette direction, je me propose, dans le travail présent, de considérer le cas le plus simple, celui des groupes transitifs du degré p^2.

M. L. Sylow *„Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier.“*, Acta Math. 11 (1887), no. 1-4, S. 201