Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 6 Abgabe: Freitag, 26.11.2010

> **ON UNIVERSAL MAPPINGS AND FREE TOPOLOGICAL GROUPS**
>
> **P. SAMUEL**
>
> It has been observed[1] that constructions so apparently different as Kronecker products, extension of the ring of operators of a module, field of quotients of an integral domain, free groups, free topological groups, completion of a uniform space, Čech compactification enter in the same frame. We intend in this paper to explain a rather general process of construction which may be applied to most of the examples quoted above.
>
> This paper will proceed axiomatically. In fact the problem under question (problem of a "universal mapping") can be only stated after a certain number of axioms. When the method of construction has been explained we shall illustrate it by the classical example of the completion of a uniform space. For more examples the reader is referred to a forthcoming book of N. Bourbaki. The same method gives also necessary and sufficient conditions for many imbedding problems. Both topological and algebraic examples will be given. In the last part of the paper our method of construction will be applied to Markoff's theory of free topological groups.[2]

Pierre Samuel, „*On universal mappings and free topological groups*", Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 591.

Aufgabe 26 (Kommutatorgruppe)

Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ heißt $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ der Kommutator von a und b. Die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G wird mit $[G, G]$ bezeichnet und Kommutatorgruppe genannt.

a) $[G, G]$ ist eine normale Untergruppe in G.

b) $[G, G]$ ist genau dann trivial, wenn G abelsch.

c) $G/[G, G]$ ist abelsch.

d) Es sei $\pi : G \to G/[G, G]$ die kanonische Projektion. Dann gilt folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Homomorphismus $\phi : G \to A$ in eine abelsche Gruppe A existiert genau ein Homomorphismus $\psi : G/[G, G] \to A$ mit $\phi = \psi \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ G/[G,G] \arrow[ur, dotted, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 27 (Cauchyfolgen und inverser Limes)

Es sei G eine Gruppe und $\{H_k\}$ eine absteigende Folge von normalen Untergruppen $H_k \subset G$; also $H_k \supset H_{k+1}$ für alle k. Die Folge $\{H_k\}$ habe trivialen Schnitt: $\bigcap H_k = \{1\}$.

Eine Folge $\{x_n\}$ in G heiße „Cauchyfolge", falls es für jedes k ein N gibt, so daß $x_n x_m^{-1} \in H_k$ für alle $n, m \geq N$. Eine Cauchyfolge $\{a_n\}$ heiße „Nullfolge", falls es für jedes k ein N gibt, so daß $a_n \in H_k$ für alle $n \geq N$.

a) Mit punktweisen Produkt bildet die Menge der Cauchyfolgen eine Gruppe C.

b) Die Menge der Nullfolgen bilden eine normale Untergruppe $N \subset C$.

Den Quotienten C/N bezeichnen wir mit Γ.

c) Es gibt eine injektive Abbildung $G \to \Gamma$.

d) Es gibt einen Isomorphismus $\Gamma \cong \varprojlim_k G/H_k$, wobei $\pi_k : G/H_k \to G/H_{k-1}$ der offensichtliche Homomorphismus ist.

Aufgabe 28 (Operation auf der Menge der Untergruppen)

Es sei X die Menge der Untergruppen einer Gruppe G. Wir betrachten die Abbildung $\phi : G \times X \to X$ gegeben durch $\phi(g, H) = gHg^{-1}$ für $g \in G, H \in X$.

a) Man zeige, daß ϕ eine Gruppenoperation auf X ist.

b) Eine Untergruppe H ist genau dann normal, wenn sie Fixpunkt ist.

c) Der Normalisator $N_G(H)$ ist der Stabilisator von H.

Aufgabe 29 (Operationen von direkten Produkten)

Wir betrachten zwei Gruppen G_1 und G_2 mit den Inklusionen $\iota_1 : G_1 \to G_1 \times G_2$ und $\iota_2 : G_2 \to G_1 \times G_2$.

a) Mit diesen beiden Inklusionen hat das direkte Produkt $G = G_1 \times G_2$ folgende universelle Eigenschaft: Zu je zwei Homomorphismen $f_1 : G_1 \to A$ und $f_2 : G_2 \to A$ in eine Gruppe A mit $f_1(g_1)f_2(g_2) = f_2(g_2)f_1(g_1)$ für $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ (eine Bedingung, die, falls A abelsch ist, erfüllt ist) gibt es genau ein $f : G_1 \times G_2 \to A$ mit $f \circ \iota_1 = f_1$ und $f \circ \iota_2 = f_2$.

b) Man folgere daraus: Seien $\rho_1 : G_1 \times X \to X$ und $\rho_2 : G_2 \times X \to X$ zwei Operationen auf einer Menge X, die vertauschen (d.h. $\rho_1(g_1, \rho_2(g_2, x)) = \rho_2(g_2, \rho_1(g_1, x))$ für $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, x \in X$). Dann gibt es genau eine Operation $\rho : G_1 \times G_2 \times X \to X$ mit

$$\rho(\iota_1(g_1), x) = \rho_1(g_1, x) \text{ und } \rho(\iota_2(g_2), x) = \rho_2(g_2, x).$$

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & G_1 \times G_2 \arrow[d, dotted, "\exists! f"] & G_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

***Aufgabe 30** (Operationen von semi-direkten Produkten)

Es sei Q eine Gruppe, die auf einer Gruppe N vermöge $\phi : Q \to \mathrm{Aut}(N)$ operiert; wir schreiben $\phi(q)(n)$ als $q_* n$.

Mit G sei das semi-direkte Produkt $N \rtimes_\phi Q$ bezeichnet und mit ι, π bzw. s die Inklusion, Quotientenprojektion bzw. Schnitt:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota"] & G \arrow[r, shift left, "\pi"] & Q \arrow[l, shift left, bend left, "s"] \end{tikzcd} .$$

a) Mit diesen Abbildungen hat das semi-direkte Produkt die folgende universelle Eigenschaft: Zu je zwei Homomorphismen $f_N : N \to A$ und $f_Q : Q \to A$ mit $f_Q(q)f_N(n) = f_N(q_* n)f_Q(q)$ für alle $q \in Q, n \in N$ gibt es genau ein $f : G \to A$ mit $f \circ \iota = f_N$ und $f \circ s = f_Q$.

Als Beispiel betrachten wir $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle t \,|\, t^2 = 1 \rangle \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ die Operation mit $\phi(t) = -\mathrm{id}_\mathbb{Z}$ ist. Weiterhin betrachten wir $D_n = \langle \sigma\tau \,|\, \tau^2 = \sigma^n = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ zusammen mit Abbildungen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{Z} = \langle s \rangle &\to D_n \\ s &\mapsto \sigma \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle t \,|\, t^2 = 1 \rangle &\to D_n \\ t &\mapsto \tau. \end{aligned}$$

(Mit unserer Notation ist also $t_* s = s^{-1}$.)

b) Man zeige: Es gibt genau einen Homomorphismus $f : D_\infty \to D_n$ mit $f \circ \iota = f_1$ und $f \circ s = f_2$ und dieses f ist surjektiv.

c) Man folgere aus a): Seien $\rho_N : N \times X \to X$ und $\rho_Q : Q \times X \to X$ zwei Operationen auf einer Menge X, mit $\rho_Q(q, \rho_N(n, x)) = \rho_N(q_* n, \rho_Q(q, x))$ für $n \in N, q \in Q, x \in X$. Dann gibt es genau eine Operation $\rho : N \rtimes_\phi Q \times X \to X$ mit

$$\rho(\iota(n), x) = \rho_N(n, x) \text{ und } \rho(s(q), x) = \rho_Q(q, x).$$