

# Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödiger

Wintersemester 2010/2011

Blatt 5

Abgabe: Freitag, 19.11.2010

Figur 7.

Diese Figur nun — welche die eigentliche Grundlage für das Nachfolgende abgibt — ist eben diejenige, von der Dedekind bei seiner Darstellung ausgeht. Er kommt zu ihr durch rein arithmetische Betrachtung. Die Werthe von  $\omega$ , welche zu einem Werthe von  $J$  gehören, sind, wie oben bemerkt, aus einem solchen Werthe durch die Substitutionen

$$(22) \quad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zu berechnen. Nennen wir solche Werthe von  $\omega$  einander *äquivalent*, so ist aus der Entstehung unserer Figur klar, dass man zu einem beliebig gegebenen Punkte der positiven Halbebene  $\omega$ , der einem schraffirten oder nicht schraffirten Dreiecke angehören mag, die Gesamtheit der mit ihm äquivalenten erhält, wenn man in allen schraffirten, bez. nicht schraffirten Dreiecken die entsprechend gelegenen Punkte markirt. Umgekehrt also — und das ist der Weg, den Hr. Dedekind einschlägt — muss man, von der Untersuchung der Substitutionen (22) ausgehend, zu unserer Dreiecksfigur gelangen, und dann, wenn man will, von ihr aus zur Definition der Grösse  $J$  (der *Valenz*).

Zu Aufgabe 25: aus Felix Kleins Artikel „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades“ in den Mathematischen Annalen von 1878/1879, Bd. 14, S.121/122

## Aufgabe 21 (Unendliche Diedergruppe)

Die unendliche Diedergruppe  $D_\infty$  sei definiert als die Gruppe aller Isometrien von  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{R}$ , also alle Funktionen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  der Form

$$f(x) = (-1)^a x + b$$

mit  $a = 0, 1$  und  $b \in \mathbb{Z}$ . Es sei  $s(x) := x + 1$  und  $t(x) := -x$ .

- a) Man zeige, daß  $s$  und  $t$  die Gruppe  $D_\infty$  erzeugen, daß  $t^2 = 1$  und  $tst = s^{-1}$  gilt, und daß jedes Element von der Form  $s^b t^a$  ist.

b) Man zeige, daß

$$G := \langle S, T \mid T^2 = 1, TST = S^{-1} \rangle$$

eine Präsentation ist.

c) Man zeige, dass  $G$  auch zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  isomorph ist, d.h. eine Präsentation  $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1 \rangle$  besitzt.

d) Die von  $s$  erzeugte Untergruppe  $N$  ist normal und isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Man zeige, dass  $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist.

**Aufgabe 22** (nützliches Faserprodukt)

Es sei

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 1$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen und  $\phi : C' \rightarrow C$  ein Homomorphismus. Man zeige: Es gibt eine Gruppe  $B'$  sowie Abbildungen  $\iota', \pi'$  und  $\phi_B$ , so daß das folgende Diagramm kommutiert und die untere Zeile exakt ist.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow 1_A & & \uparrow \phi_B & & \uparrow \phi & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C' & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Man formuliere das zu dem obigen Problem duale Problem.

**Aufgabe 23** (Gruppen faktorisieren)

Sei  $G$  eine Gruppe,  $H$  und  $K$  normale Untergruppen.

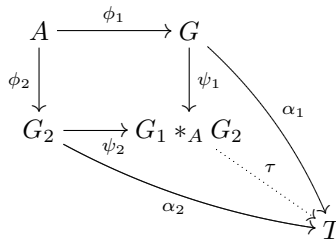
a) Falls  $G = HK$  und  $H \cap K = 1$  dann ist  $G \cong H \times K$ .

Sei  $A$  eine normale Untergruppe in  $G$  und  $A'$  eine normale Untergruppe in  $G'$ . Man zeige

- b)  $A \times A'$  ist eine normale Untergruppe in  $G \times G'$  und
- c)  $(G \times G') / (A \times A') \cong (G/A) \times (G'/A')$ .

**Aufgabe 24** (Universelle Eigenschaft des Amalgams)

Seien  $A, G_1$  und  $G_2$  Gruppen mit Homomorphismen  $\phi_1 : A \rightarrow G_1$  und  $\phi_2 : A \rightarrow G_2$ . Das Amalgam ist eine Gruppe  $G_1 *_A G_2$  zusammen mit Homomorphismen  $\psi_1 : G_1 \rightarrow G_1 *_A G_2$  und  $\psi_2 : G_2 \rightarrow G_1 *_A G_2$  so daß  $\psi_1 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \phi_2$  und daß die folgende universelle Eigenschaft gilt: Für jede Gruppe  $T$  und Homomorphismen  $\alpha_1 : G_1 \rightarrow T$  und  $\alpha_2 : G_2 \rightarrow T$  mit  $\alpha_1 \circ \phi_1 = \alpha_2 \circ \phi_2$  gibt es genau einen Homomorphismus  $\tau : G_1 *_A G_2 \rightarrow T$ , so daß  $\alpha_1 = \tau \circ \psi_1$  und  $\alpha_2 = \tau \circ \psi_2$ .



Man zeige, daß das Amalgam bis auf Isomorphie eindeutig durch diese Eigenschaft charakterisiert ist.

**\*Aufgabe 25** (Die modulare Gruppe)

Die modulare Gruppe ist definiert als Quotient:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{-1, 1\}.$$

Es sei  $G$  die Gruppe, welche durch  $\langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle$  präsentiert wird. Man zeige

- a)  $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  und
- b)  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

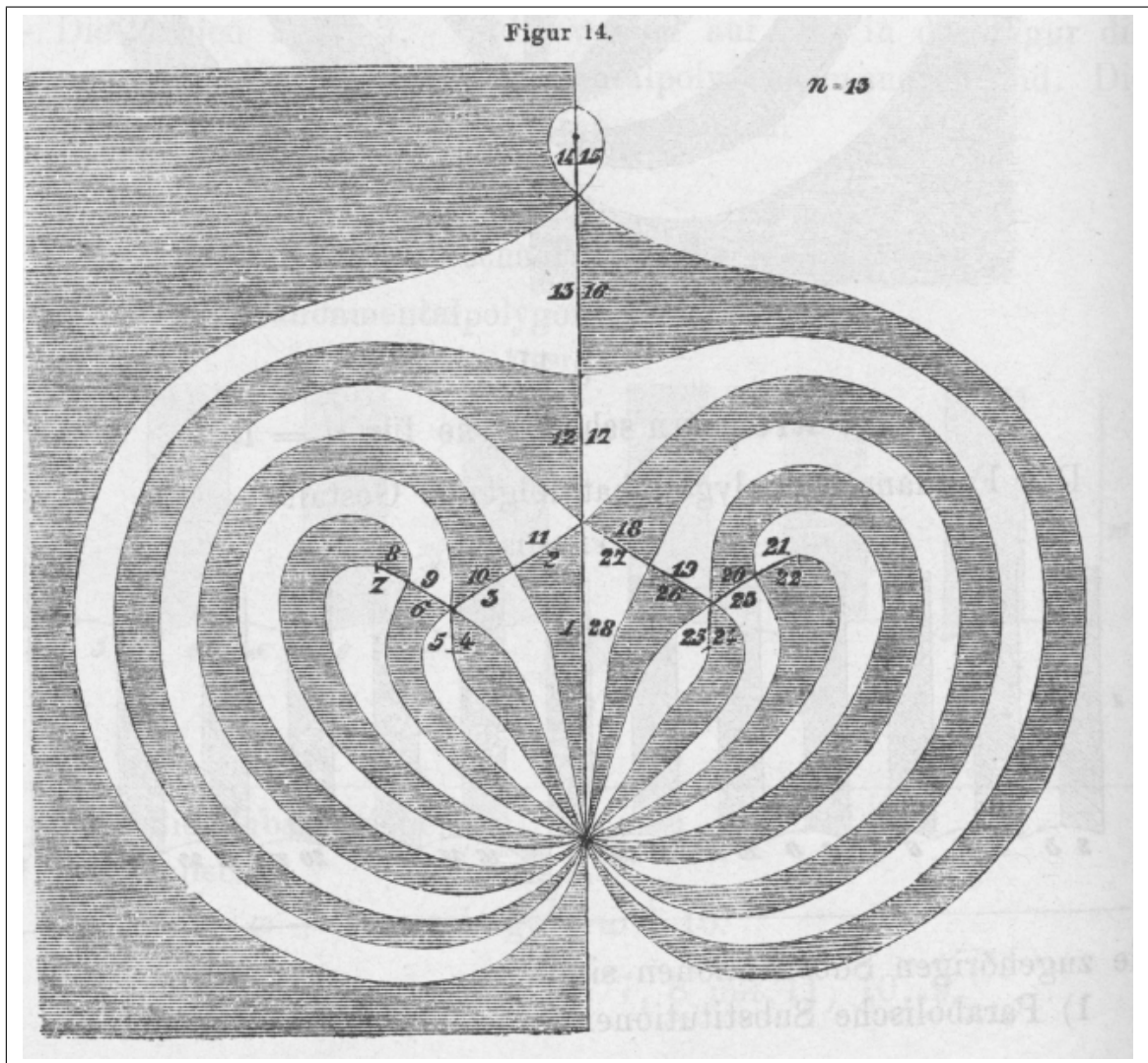
Hinweis: Man betrachte die Bilder von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

in  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  und erinnere sich an Aufgabe 59 auf Blatt 10 der Vorlesung Lineare Algebra I. Der Cayley Graph zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  war Illustration auf Blatt 3.

Analog zu  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  definiert man  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Man zeige:

- c)  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{S}_3$ .



a.a.O; S.138