Übungsaufgaben zu Gruppen, Ringe, Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 4 Abgabe: Freitag, 12.11.2010

Aufgabe 16 (Zentrum einer Gruppe)

Das Zentrum einer Gruppe ist definiert als

$$Z(G) = \{z \in G | \forall g \in G \quad zg = gz\}.$$

a) $Z(G)$ ist eine normale Untergruppe von G.

b) Ist G kommutativ, so ist $G/Z(G)$ trivial. Ist G nicht kommutativ, so ist $G/Z(G)$ nicht zyklisch.

c) Der Index $[G : Z(G)]$ kann nicht eine Primzahl sein.

d) $G/Z(G)$ ist isomorph zur Gruppe der inneren Automorphismen $\mathrm{Inn}(G)$ in $\mathrm{Aut}(G)$.

e) Man bestimme das Zentrum der Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.

Aufgabe 17 (Unendliche Gruppe, erzeugt von zwei Spiegelungen)

Man beweise auf zwei Arten, daß die Gruppe

$$G = \left\langle x, y | x^2 = y^2 = 1 \right\rangle$$

unendlich ist.

a) Es ist klar, daß man jedes Wort mit diesen Relationen auf die Form $\cdots xyxy \cdots$ reduzieren kann. Man beweise, daß jedes Element von G durch genau ein solches Wort repräsentiert wird.

b) Seien L und L' zwei verschiedene, durch den Nullpunkt gehende Geraden in der Ebene, so daß der von ihnen gebildete Winkel kein rationales Vielfaches von 2π ist. Man zeige, daß G zu der Gruppe $H \subset O(2)$ isomorph ist, die von den Spiegelungen s und s' and den Geraden L bzw. L' erzeugt wird.

Aufgabe 18 (Präsentierungen von Produkten)

Sei $G_1 = \langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{R}_1 \rangle$ und $G_2 = \langle \mathcal{E}_2 | \mathcal{R}_2 \rangle$.

a) Das direkte Produkt $G = G_1 \times G_2$ ist präsentiert durch

$$\langle \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 | \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_{12} \rangle$$

mit

$$\mathcal{R}_{12} := \{e_1 e_2 e_1^{-1} e_2^{-1} | e_1 \in \mathcal{E}_1, e_2 \in \mathcal{E}_2\}.$$

b) Das freie Produkt $G = G_1 * G_2$ ist präsentiert durch

$$\langle \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 | \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \rangle.$$

c) Das semi-direkte Produkt $G = G_1 \rtimes G_2$ ist präsentiert durch

$$\langle \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 | \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_{12} \rangle$$

mit

$$\mathcal{R}'_{12} := \{e_2 e_1 e_2^{-1} = \phi(e_2)(e_1) | e_1 \in \mathcal{E}_1, e_2 \in \mathcal{E}_2\}.$$

Aufgabe 19 (Projektive Eigenschaft von freien Gruppen)

Es sei F eine freie Gruppe, G und G' beliebige Gruppen und $\pi : G \to G'$ ein Epimorphismus. Dann existiert zu jedem Homomorphismus $\phi : F \to G'$ ein $\Phi : F \to G$ mit $\pi \circ \Phi = \phi$.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, dotted, "\exists\Phi"'] \arrow[d, "\phi"] \\
G \arrow[r, "\pi"'] & G'
\end{tikzcd}$$

***Aufgabe 20** (Endliche Präsentation)

Eine Gruppe heißt **endlich präsentiert**, wenn sie durch eine endliche Menge von Erzeugern und eine endliche Menge von Relatoren präsentiert werden kann.

a) Man zeige, daß jede endliche Gruppe G endlich präsentiert ist.

b) Sei $G = \langle \mathcal{E} | \mathcal{R} \rangle$ endlich präsentiert. Nun sei X ein beliebiges Erzeugendensystem; dann gibt es eine endliche Teilmenge $X_0 \subset X$ und eine endliche Liste Y von Relatoren, so daß $G = \langle X_0 | Y \rangle$ eine endliche Präsentation ist.

   Hinweis: Man schreibe jeden Erzeuger $e \in \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ als Produkt von $x_j \in X$; das sind endlich viele Produkte. Man fasse alle vorkommenden x_j zu X_0 zusammen, also $X_0 = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Nun schreibe man $e_i \in \mathcal{E}$ als Produkt der x_j, also $e_i = W_i(x_1, \ldots, x_n)$ und umgekehrt $x_j = V_j(e_1, \ldots, e_m)$. Sind $R_1, \ldots R_t$ die Relatoren in $\mathcal{R}$, dann gelten jetzt:

$$R_k(W_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, W_m(x_1, \ldots, x_n)) \text{ für } k = 1, \ldots, t$$

   und

$$x_l = V_l(W_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, W_m(x_1, \ldots, x_n)) \text{ für } l = 1, \ldots, n.$$

   Diese Doppelliste sei Y. Nun zeigt man durch offensichtliche Abildungen: $\langle \mathcal{E} | \mathcal{R} \rangle = \langle X_0 | Y \rangle$.

c) Es sei G eine endlich präsentierte Gruppe und H Retrakt von G, d.h. es gibt Homomorphismen $j : H \to G$ und $r : G \to H$ mit $r \circ j = 1_H$. Dann ist auch H endlich präsentiert.