

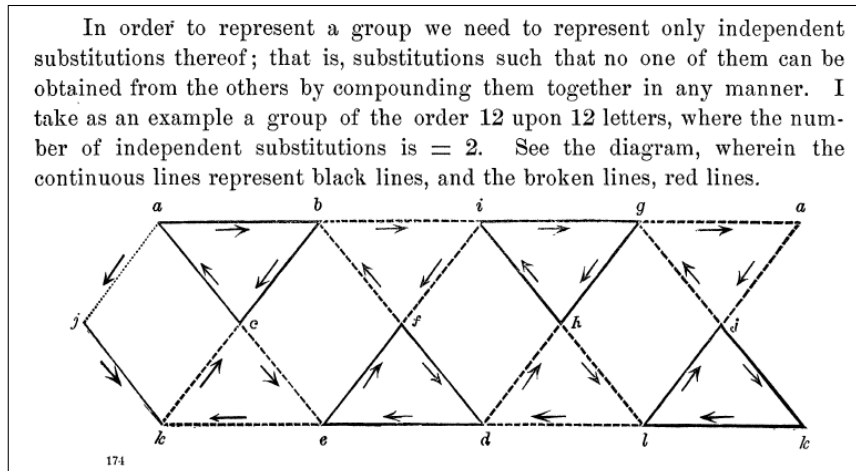
Übungsaufgaben zu Gruppe Ringe Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 2

Abgabe: Freitag, 29.10.2010



Die Anfänge der Cayley-Graphen in “The Theory of Groups: Graphical Representation”, Arthur Cayley, *American Journal of Mathematics*, Vol. 1, No. 2 (1878), p. 174

Aufgabe 6 (Zweiter Isomorphiesatz)

- a) Es sei H eine beliebige und N eine normale Untergruppe von G und

$$HN := \{hn | h \in H, n \in N\}.$$

- i) HN ist eine Untergruppe, die H und N enthält.
- ii) N ist normal in HN .
- iii) $H \cap N$ ist normal in H .
- iv) Es gibt einen Isomorphismus, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} H \cap N & \hookrightarrow & H & \twoheadrightarrow & H/H \cap N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ N & \hookrightarrow & HN & \twoheadrightarrow & HN/N. \end{array}$$

- v) Falls G endlich ist, gilt:

$$|H||N| = |HN||H \cap N|.$$

- vi) Ist NH gleich oder isomorph zu HN ?
 - vii) Genau dann wenn $H \cap N = \{e\}$ gilt, ist HN isomorph zum semidirekten Product $N \rtimes H$.
- b) Wir betrachten die Gruppe \mathbb{C}^\times sowie die darin enthaltenen Untergruppen $\mathbb{S}^1, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}^\times$ und $\{1, -1\}$. Den Quotient $\mathbb{S}^1/\{-1, 1\}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}P^1$.
- i) $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{S}^1 \mathbb{R}^\times$.
 - ii) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}^\times \cong \mathbb{R}P^1$.
 - iii) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 7 (Produkte von Elementen endlicher Ordnung)

Es sei G eine Gruppe und $a, b \in G$.

- i) Falls a und b von endlicher Ordnung sind und $ab = ba$, so hat ab endliche Ordnung.
- ii) Man finde eine Gruppe G und $a, b \in G$ von endlicher Ordnung, so daß ab nicht von endlicher Ordnung ist.

Aufgabe 8 (Diskrete Untergruppen des \mathbb{R}^n)

- a) Es sei H eine nicht-triviale Untergruppe von \mathbb{R} mit der Eigenschaft: es gibt eine positive reelle Zahl δ , so daß

$$H \cap]-\delta, \delta[= \{0\}.$$

Dann ist H zyklisch und insbesondere isomorph zu \mathbb{Z} (aber natürlich nicht unbedingt gleich \mathbb{Z} !)

- b) Nun sei H eine Untergruppe des \mathbb{R}^n mit der Eigenschaft: für jede beschränkte Menge B ist der Schnitt $H \cap B$ endlich.

Wir wollen zeigen: $H \cong \mathbb{Z}^k$ für ein $k \leq n$. Man kann wie folgt vorgehen: Es bezeichne V den von H aufgespannten Untervektorraum.

- i) Man wähle eine Basis $b_1, \dots, b_m \subset H$ von V und betrachte $H' = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$, die von der Basis erzeugte Untergruppe von H . Es gilt $H' \cong \mathbb{Z}^m$.
- ii) Jedes Element $v \in V$ kann man als

$$v = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m + h' \text{ mit } a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq a_i < 1$$

mit $h' \in H'$ schreiben.

- iii) Man zeige: H/H' ist endlich. (Man finde ein Repräsentantensystem)
- iv) Man setze $c = |H/H'|$ und zeige $c \cdot H \subset H'$.
- v) $c \cdot H \cong H$.
- vi) Schließlich benutze man das folgende Lemma (ohne es zu beweisen) um den Beweis zu beenden.

Lemma: Jede Untergruppe von \mathbb{Z}^m ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $\leq m$.

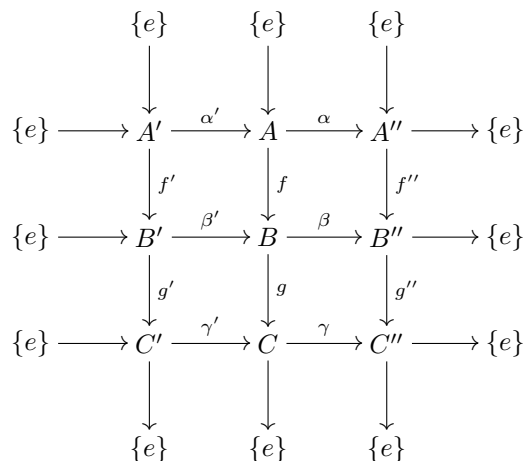
Aufgabe 9 (Erzeugendensysteme)

Sei G eine Gruppe und $\mathcal{E} \subset G$ ein Erzeugendensystem.

- i) Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, so ist \mathcal{E}' auch ein Erzeugendensystem.
- ii) Ist $\pi : G \rightarrow \bar{G}$ ein Epimorphismus, so ist $\pi(\mathcal{E})$ ein Erzeugendensystem von \bar{G} .
- iii) Wir nennen \mathcal{E} ein *nicht-reduzierbares* Erzeugendensystem, wenn keine echte Teilmenge von \mathcal{E} ein Erzeugendensystem ist. Man zeige, daß nicht-reduzierbare Erzeugendensysteme einer Gruppe G durchaus verschiedene Mächtigkeiten haben können.
- iv) Sei $G = \mathbb{Z}$ und $H = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ eine endlich-erzeugte Untergruppe. Man zeige, daß H auch von $\alpha = \text{ggT}(|a_1|, \dots, |a_n|)$ erzeugt ist.

***Aufgabe 10** (3×3 Lemma: eine Jagd in drei Teilen)

In dem folgenden kommutativen Diagramm von Gruppen seien die Zeilen exakt.



1. Falls die äußeren Spalten exakt sind und $g \circ f = 1 : A \rightarrow B \rightarrow C$ trivial ist, dann ist die mittlere Spalte exakt.
2. Falls die linke und die mittlere Spalte exakt sind, so ist auch die rechte Spalte exakt.
3. Falls die rechte und die mittlere Spalte exakt sind, so ist auch die linke Spalte exakt.

Zusatz: Man leite den dritten Isomorphiesatz aus diesem Lemma her.

I give now a table of the several groups $s = 2$ to 12, viz. these are as above: A , unibasic; B , bibasic; C , tribasic; the several groups being

$2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 7A, 8A, 9A, 10A, 11A, 12A,$
 $4B, 6B, 8B1, 9B, 10B, 12B1,$
 $8B2, 12B2,$
 $8B3, 12B3,$
 $8C, 12B4,$

in all 23 groups.

TABLE OF THE GROUPS 2 TO 12.

2A	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">a</td><td style="padding: 2px 5px;">b</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">b</td><td style="padding: 2px 5px;">a</td></tr> </table>	a	b	b	a	$1 = 1$ $R = (ab) = R$	1 colour. $= 1$	$R. 1$ digon $\frac{1}{1}$												
a	b																			
b	a																			
3A	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">a</td><td style="padding: 2px 5px;">b</td><td style="padding: 2px 5px;">c</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">b</td><td style="padding: 2px 5px;">c</td><td style="padding: 2px 5px;">a</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">c</td><td style="padding: 2px 5px;">a</td><td style="padding: 2px 5px;">b</td></tr> </table>	a	b	c	b	c	a	c	a	b	$1 = 1$ $R = (abc) = R$ $R^2 = (acb) = R^{-1}$	1 colour. $= 1$	$R. 1$ 3gon $\frac{3}{3}$							
a	b	c																		
b	c	a																		
c	a	b																		
4A	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">a</td><td style="padding: 2px 5px;">b</td><td style="padding: 2px 5px;">c</td><td style="padding: 2px 5px;">d</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">b</td><td style="padding: 2px 5px;">c</td><td style="padding: 2px 5px;">d</td><td style="padding: 2px 5px;">a</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">c</td><td style="padding: 2px 5px;">d</td><td style="padding: 2px 5px;">a</td><td style="padding: 2px 5px;">b</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">d</td><td style="padding: 2px 5px;">a</td><td style="padding: 2px 5px;">b</td><td style="padding: 2px 5px;">c</td></tr> </table>	a	b	c	d	b	c	d	a	c	d	a	b	d	a	b	c	$1 = 1$ $R = (abcd) = R$ $R^2 = (ac)(bd) = G$ $R^3 = (adcb) = R^{-1}$	2 colours. $= 1$	$R. 1$ 4gon $\frac{4}{6}$ $G. 2$ digons $\frac{2}{6}$
a	b	c	d																	
b	c	d	a																	
c	d	a	b																	
d	a	b	c																	

Gruppentafeln (vergleiche Aufgabe 3) aus "On the Theory of Groups", Arthur Cayley, *American Journal of Mathematics*, Vol. 11, No. 2 (Jan., 1889), p. 145