

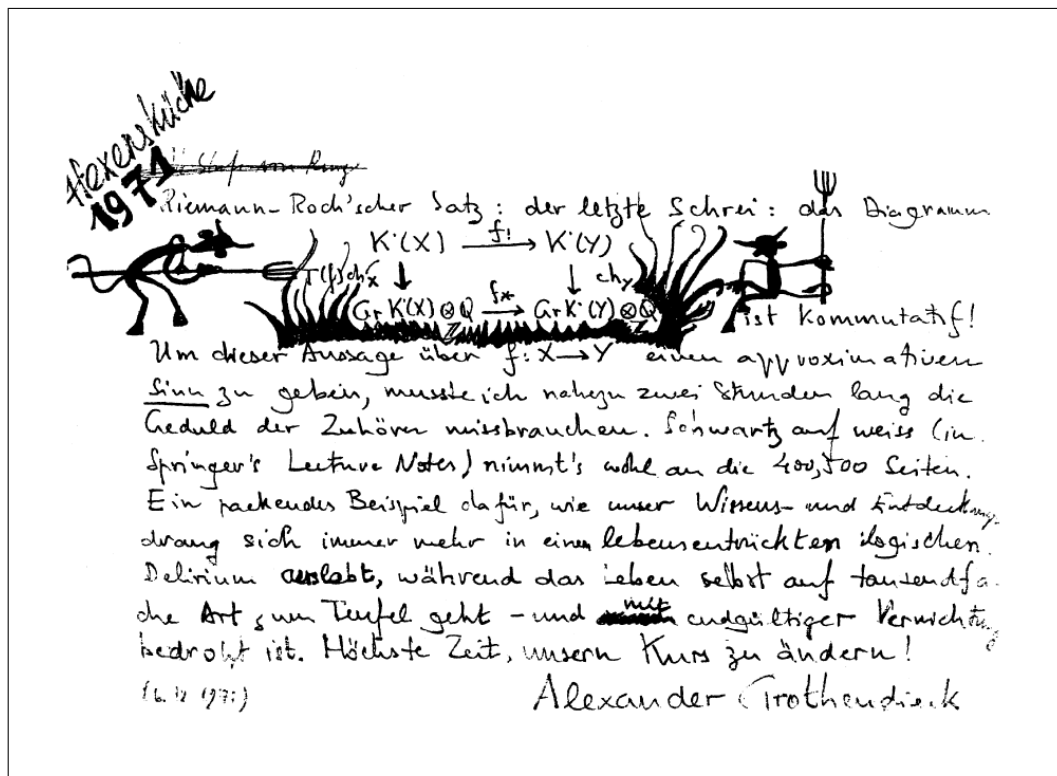
Übungsaufgaben zu Gruppe Ringe Moduln

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2010/2011

Blatt 1

Abgabe: Freitag, 22.10.2010



(Illustration aus Allyn Jackson's "Comme Appel  du N ant— As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck", *Notices of the AMS*, vol. 51, no. 10, November 2004.)

Aufgabe 1 (Kriterien f ur Kommutativität)

Man zeige, daß folgende Aussagen f ur eine Gruppe G  quivalent sind.

- G ist kommutativ
- Die Multiplikation $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ ist ein Homomorphismus
- Die Inversion $G \rightarrow G$, $a \mapsto a^{-1}$ ist ein Homomorphismus
- Die Quadrierung $G \rightarrow G$, $a \mapsto a^2$ ist ein Homomorphismus.

Aufgabe 2 (Halbgruppen und Gruppen)

a) Sei H eine Halbgruppe. Man zeige, daß H eine Gruppe ist, falls folgendes gilt:

- Es gibt ein $e \in G$ mit $e \cdot g = g$ f ur alle $g \in G$ und
 - F ur alle $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$ mit $g^{-1}g = e$.
- b) Man nenne jeweils eine Halbgruppe, die keine Gruppe ist, f ur die jedoch entweder i) oder ii) gilt, sowie eine f ur die weder i) noch ii) gilt.

c) Sei G eine Gruppe. Man zeige, daß für alle $a, x, y \in G$ die folgende (Rechts)kürzungsregel gilt:

$$ax = ay \rightarrow x = y.$$

d) Man nenne eine Menge G , die gleichzeitig eine Gruppe (G, \circ) und eine Halbgruppe (G, \times) ist, wobei (G, \times) keine Gruppe ist.

Aufgabe 3 (Grüppchen)

Man beweise oder widerlege:

- i) Alle Gruppen mit weniger als 6 Elementen sind abelsch.
- ii) Alle Gruppen mit 6 Elementen sind abelsch.

Aufgabe 4 (Streckscherungen)

Man betrachte in $GL_2(\mathbb{R})$ die Menge aller Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } a \neq 0,$$

und zeige, daß sie eine Gruppe G bilden. Ist diese Gruppe abelsch? Man gebe zwei abelsche Untergruppen an. Man folgere daraus, daß es auf $G' = \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ eine Gruppenstruktur gibt, nämlich

$$(a, b) * (a', b') := (aa', ab' + b),$$

die nicht isomorph zur Produktgruppe $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ ist.

*Aufgabe 5 (Grothendieck-Gruppe)

Es sei H eine kommutative Halbgruppe. Die in der Vorlesung konstruierte Gruppe $G(H)$ und Halbgruppenhomomorphismus $\iota = \iota_H : H \rightarrow G(H)$ haben folgende Eigenschaft: Für alle kommutativen Gruppen K und für alle Halbgruppenhomomorphismen $\phi : H \rightarrow K$ gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\Phi : G(H) \rightarrow K$ so daß $\Phi \circ \iota_H = \phi$.

- a) Man beschreibe $G(H)$ für die folgenden kommutativen Halbgruppen H
 - i) $(\mathbb{N}_{>0}, \cdot)$
 - ii) $(\mathbb{N}_{\geq 0}, \cdot)$
 - iii) $(\mathbb{N}_{\geq 0}, +)$
 - iv) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$
- b) Sei nun $h : H \rightarrow H'$ ein Halbgruppenhomomorphismus. Man konstruiere einen Gruppenhomomorphismus $G(h) : G(H) \rightarrow G(H')$, so daß $\iota_{H'} \circ h = G(h) \circ \iota_H$.
- c) Sei K eine kommutative Gruppe. Wir fassen K als Halbgruppe auf und betrachten $G(K)$. Man zeige: $K \cong G(K)$.
- d) Sei H eine kommutative Halbgruppe und K eine Gruppe. Man konstruiere eine Bijektion:

$$\{\text{Halbgruppenhomomorphismen von } H \text{ nach } K\} \cong \{\text{Gruppenhomomorphismen von } G(H) \text{ nach } K\}.$$

- e) Sei H eine kommutative Halbgruppe. Man zeige, daß H genau dann die Kürzungsregel erfüllt, wenn ι_H injektiv ist.