Analysis III, Probeklausur / Klausur

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2015/16

Aufgabe 1

Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**.

☐ Falls $M \subset \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge ist und $U \subset M$, so ist auch U eine Nullmenge.

☐ Falls $1 < p < q < \infty$ und $f \notin L^q([0,1])$, dann gilt $f \notin L^p([0,1])$.

☐ Seien $M \subset \mathbb{R}^d$ messbar und beschränkt und die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Es gibt eine Folge stetiger Funktionen $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $g_k : M \to \mathbb{R}$, die für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

☐ Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$, dann gilt $f * g \in C^2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2

Seien $1 \leq p_j \leq \infty$ und $\sum_{j=1}^n p_j^{-1} = r^{-1} \leq 1$. Zeigen Sie: Sind $f_j \in L^{p_j}$ für $j = 1, \ldots, n$, so ist $\prod_{j=1}^n f_j \in L^r$ und

$$\Big\| \prod_{j=1}^n f_j \Big\|_{L^r} \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p_j}} .$$

Aufgabe 3

Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f_x(y) := f(y-x)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \|f - f_x\|_{L^p} = 0.$$

Was geschieht, wenn $p = \infty$?

Aufgabe 4

Sei $B_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel. Zeigen Sie:

(a) Falls $p \in (3/2, \infty]$, existiert eine Zahl C_p, so dass für alle $f \in L^p(B_1)$ gilt:

$$\int_{B_1} \frac{|f(x)|}{|x|} dx \leq C_p \|f\|_p.$$

(b) Falls $p \in [1, 3/2)$, kann keine Zahl wie im Teil (a) existieren.

Aufgabe 5

Verwenden Sie den Satz von Fubini sowie die Beziehung

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt \quad \text{für } x > 0$$

um zu zeigen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 6

Seien B_1 die Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ und

$$\Gamma := \partial B_1 \cap (\{x > 0, z = 0\} \cup \{x = 0, z > 0\}).$$

Sei $F(x, y, z) = (-y + e^{x+z}, 0, e^{x+z})$. Für eine Wahl von ν als Tangente an Γ, berechnen Sie das Integral

$$\int_\Gamma F \cdot \nu d\sigma,$$

wobei σ das Oberflächenmaß auf Γ ist.

Aufgabe 7

Berechen Sie alle Determinanten von $3x3$ Untermatrizen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Benutzen Sie das Ergebnis um das 3 Volumen des Epipeds zu berechnen, das von den drei Zeilenvektoren aufgespannt wird. Berechnen Sie einen Vektor in $\mathbb{R}^4$ der zu den drei Zeilenvektoren orthogonal ist.

Aufgabe 8

Benutzen Sie den Delta-Kalkül, um das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ zu berechnen.

Aufgabe 9

Konstruieren Sie ein nichtnegatives Radonmaß im $\mathbb{R}^2$ das nicht absolut stetig ist bezüglich des Lebesgue Maßes. Ausserdem soll jede einelementige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ das Maß Null haben bezüglich dieses Maßes. Begründen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 10 Sei ν ein positives Radonmaß auf $\mathbb{R}$ und sei μ das Produktmaß (auf $\mathbb{R}^2$) von ν mit sich selbst. Zeigen Sie, wenn μ invariant ist unter beliebiger Rotation um den Nullpunkt, dann ist ν ein Vielfaches des Dirac Maßes, des Lebesgue Maßes, oder eines Maßes $e^{-cx^2}dx$.

Hint: Nehmen Sie zunächst differenzierbare Dichte bzgl. des Lebesguemaßes an.