Aufgabe 1(2,2,2,2,2)

(a) Definieren Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Untersumme $L_k(f, 0, 1)$ einer Funktion $f : [0, 1] \cap \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$. Hier ist $\mathbb{Y}$ die Menge der dyadischen Zahlen.

(b) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Untersumme $L_k(f, 0, 1)$ der durch $f(x) = e^x$ definierten Funktion an, der kein Summenzeichen mehr enthält.

(c) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Untersumme $L_k(g, 0, 1)$ der durch $g(x) = x$ definierten Funktion an, der kein Summenzeichen mehr enthält.

(d) Berechnen Sie für das Beispiel aus (b) anhand des dort gewonnenen Ausdrucks $\lim_{k\to\infty} L_k(f, 0, 1)$.

(e) Berechnen Sie für das Beispiel aus (c) anhand des dort gewonnenen Ausdrucks $\lim_{k\to\infty} L_k(g, 0, 1)$.

Begründen Sie alle Ihre Aussagen.

Aufgabe 2(2+4+4)

(a) Begründen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{t \to \infty} t^n e^{-t} = 0.$$

Hier ist $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

(b) Beweisen Sie durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n! = \lim_{T \to \infty} \int_0^T t^n e^{-t} \, dt.$$

(c) Beweisen Sie: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$\frac{1}{n+1} = \binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} (1-t)^k \, dt.$$

Aufgabe 3(1+1+5+3)

(a) Sei $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen. Formulieren Sie, was es heißt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b(n)$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

(b) Formulieren Sie, was es heißt, dass diese Reihe absolut konvergiert.

(c) Beweisen Sie das Leibniz-Kriterium in der folgenden Form: Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a(n)$$

gegen einen endlichen Grenzwert.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine alternierende Reihe wie im Leibniz Kriterium an, die nicht absolut konvergiert. Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 4(5+5)

(a) Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktion auf dem (offenen) Interval $(0, 2)$:

$$\frac{6}{x^2 - 2x} \ .$$

(b) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{2 - \cos^2 x} dx \ .$$

Aufgabe 5(3+5+2)

(a) Zeigen Sie, dass die Fouriersche Reihe

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N, n\neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

gleichmäßig auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie die Fourierschen Koeffizienten

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = x^2$$

für alle $-\pi \le x \le \pi$.

(c) Unter der Annahme dass

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

punktweise gegen $f(x)$ konvergiert für die Funktion f aus Aufgabenteil (b), was Sie hier ohne Beweis annehmen dürfen, zeigen Sie:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe 6(2+4+4)

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine nach oben und nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen.

(a) Definieren Sie $\limsup a$ und $\liminf a$.

(b) Beweisen Sie: $\liminf a \leq \limsup a$.

(c) Geben Sie ein Beispiel von zwei Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an, so dass

$$\liminf(a + b) \neq (\liminf a) + (\liminf b)$$

und begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 7(2+2+3+3)

(a) Geben Sie die Taylorreihen der Sinusfunktion und der Exponentialfunktion sowie deren Konvergenzradien an (ohne Beweis).

(b) Geben Sie einen Ausdruck an für $\sin(z)$ an mithilfe der Exponentialfunktion und begründen Sie diesen Ausdruck sorgfältig mithilfe der Taylorreihen aus (a).

(c) Beweisen Sie: Wenn z nicht reell ist, dann gilt $\sin(z) \neq 0$.

(d) Für welche komplexen Zahlen z gilt $\sin(z) = 2$?

Aufgabe 8(2,4,4)

(a) Definieren Sie mithilfe des Mittelwertes $m(a,b) = \frac{a+b}{2}$ zweier dyadischer Zahlen a und b was es heisst, dass eine Funktion $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ konvex ist. (Hier ist $\mathbb{Y}$ die Menge der dyadischen Zahlen.)

(b) Zeigen Sie: Eine konvexe monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt 0.

(c) Ist jede konvexe Funktion $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt 0? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 9(4+6)

Sei A eine nichtleere Menge und sei B die Menge aller Funktionen $f : A \to I_2$ wobei $I_2 = \{0, 1\}$.

(a) Zeigen Sie: es gibt eine injektive Abbildung $g : A \to B$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keine injektive Abbildung $h : B \to A$.

Aufgabe 10(3+2+2+3)

Seien P ein Polynom und $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = P(1/x)e^{-1/x}$$

(a) Beweisen Sie: der rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle 0 ist 0.

(b) Beweisen Sie (unter Benutzung von (a)): der rechtsseitige Grenzwert der n-ten Ableitung von f an der Stelle 0 ist 0.

(c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Formulieren Sie eine Definition der Aussage "g ist reell analytisch im Punkt 0".

(d) Beweisen Sie: Es gibt keine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die reell analytisch an der Stelle 0 ist und deren Einschränkung auf A gleich der Funktion $e^{-1/x}$ ist.