Aufgabe 1(1+3+2+4)

(a) Formulieren Sie das Additionstheorem für den Sinus.

(b) Beweisen Sie durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin x \neq 0$ gilt

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}$$

(c) Formulieren Sie die Produktregel der Differentiation für stetig differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(d) Beweisen Sie durch Induktion: Für all $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt: Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, beide n mal stetig differenzierbar, so ist des Produkt fg auch n mal stetig differenzierbar und es gilt die verallgemeinerte Produktregel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Aufgabe 2(6+4)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0)$ Beweisen Sie: Ist f an der Stelle 0 differenzierbar, so ist die Ableitung von f an der Stelle 0 gleich 0.

(b) Finden Sie alle Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -4x^4 + 2x^2 + 1$$

Nehmen Sie ohne Beweis an, dass diese Funktion mindestens ein Maximum hat. Begründen Sie Ihre Lösung.

Aufgabe 3(4+3+3)

(a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$, berechnen Sie den Folgengrenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^\alpha + 1}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^\alpha + 1}$$

gegen einen endlichen Wert? Begründen Sie Ihre Behauptung!

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe in (b) absolut? Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 4(5+5)

(a) Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktion auf dem (offenen) Interval $(0, 2)$:

$$\frac{8}{x^3 - 4x} \ .$$

(b) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{2 - \sin^2 x} dx.$$

Aufgabe 5(3+5+2)

(a) Zeigen Sie, dass die Fouriersche Reihe

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N, n\neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

gleichmäßig auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie die Fourierschen Koeffizienten

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = x^2$$

für alle $-\pi \leq x \leq \pi$.

(c) Unter der Annahme dass

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

punktweise gegen $f(x)$ konvergiert für die Funktion f aus Aufgabenteil (b), was Sie hier ohne Beweis annehmen dürfen, zeigen Sie:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe 6 (2+2+3+3)

Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge nichtnegativer reeller Zahlen.

(a) Definieren Sie $\limsup a$

(b) und erläutern Sie dabei, warum $\limsup a$ existiert und eine relle Zahl ist.

(c) Sei b eine zweite solche Folge. Beweisen Sie

$$\limsup(a+b) \leq (\limsup a) + (\limsup b)$$

(d) Geben Sie ein Beispiel von zwei Folgen a und b wie oben an, so dass

$$\limsup(a+b) < (\limsup a) + (\limsup b)$$

und begründen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 7 (4+3+3)

(a) Bestimmen Sie die Menge aller komplexen Zahlen z für die gilt $e^z = ei$

(b) Bestimmen Sie die Menge aller komplexen Zahlen z für die gilt $z^3 = 8i$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller komplexen Zahlen z für die ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit $e^a = z$

Begründen Sie Ihre Lösungen.

Aufgabe 8(2,2,4,2)

Begründen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

(b) Es existiert eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die nicht injektiv ist.

(c) Eine stetige injektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

(d) Es existiert eine injektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

Aufgabe 9(4+6)

Sei A eine nichtleere Menge und sei B die Menge aller Funktionen $f : A \to I_2$ wobei $I_2 = \{0, 1\}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine surjektive Abbildung $f : B \to A$.

(b) Zeigen Sie: es gibt keine surjektive Abbildung $g : A \to B$.

Aufgabe 10(3+2+2+3)

Seien P ein Polynom und $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = P(1/x)e^{-1/x}$$

(a) Beweisen Sie: der rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle 0 ist 0.

(b) Beweisen Sie (unter Benutzung von (a)): der rechtsseitige Grenzwert der n-ten Ableitung von f an der Stelle 0 ist 0.

(c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Formulieren Sie eine Definition der Aussage "g ist reell analytisch im Punkt 0".

(d) Beweisen Sie: Es gibt keine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die reell analytisch an der Stelle 0 ist und deren Einschränkung auf A gleich der Funktion $e^{-1/x}$ ist.