

Vorkurs Mathematik (Nebenfach)

Clemens Kienzler

Mathematisches Institut der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

11. September 2013

Elementare Rechenmethoden

Geometrie

Funktionen

Differential- und Integralrechnung

Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Algebra

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Elementare Rechenmethoden

Mengen und Zahlen

Rechenregeln

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Notationen

Mengen

- ▶ Eine *Menge* ist in der Mathematik eine Zusammenfassung von Objekten, genannt *Elemente*.
- ▶ Diese werden in *Mengenklammern* geschrieben: $\{\}$.
- ▶ Schreibweise: $x \in M$. Leere Menge \emptyset .
- ▶ Mengen kann man durch Aufzählung von Elementen oder durch die Angabe von Eigenschaften der Elemente beschreiben.

Beispiel

$\{\text{Fußballvereine, die das CL-Finale 2013 bestritten haben}\} = \{\text{FCB, BVB}\}.$

Natürliche Zahlen

- ▶ Wir bezeichnen die Zahlen $1, 2, 3, \dots$ als *natürliche Zahlen*.
- ▶ Die Menge der natürlichen Zahlen wird gekennzeichnet durch das Symbol \mathbb{N} , dh

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- ▶ Soll die 0 enthalten sein, so schreiben wir \mathbb{N}_0 .

Beispiel

Die natürlichen Zahlen werden genutzt um Dinge zu zählen, beispielsweise Kekse.

Rechengesetze

Eine Rechenoperation $*$ auf einer Menge M heißt *kommutativ*, wenn für alle a und b aus M gilt

$$a * b = b * a$$

Eine Rechenoperation $*$ auf einer Menge M heißt *assoziativ*, wenn für alle a, b und c aus M gilt

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

Beispiel

Addition $+$ und Multiplikation \cdot sind auf der Menge \mathbb{N} sowohl kommutativ als auch assoziativ.

Mit der Multiplikation \cdot und der Addition $+$ erfüllt die Menge \mathbb{N} das *Distributivgesetz*, d.h. es gilt für drei beliebige natürliche Zahlen a, b, c

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ganze Zahlen

Um sinnvoll subtrahieren zu können, müssen wir die natürlichen Zahlen erweitern.

- ▶ Zu jeder natürlichen Zahl können wir eine Gegenzahl definieren.
- ▶ Die Menge aller Gegenzahlen von natürlichen Zahlen bezeichnen wir als *negative Zahlen*.
- ▶ Die Gegenzahl einer negativen Zahl ist die entsprechende positive Zahl:

$$-(-a) = a.$$

- ▶ Alle negativen und natürlichen Zahlen sowie die 0 bilden zusammen die *ganzen Zahlen*, bezeichnet mit \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Beispiel

Eine gute Anschauung der negativen Zahlen sind Temperaturen unter 0 oder der Kontostand am Ende des Monats.



Rechengesetze auf \mathbb{Z}

Vorsicht!

Die Subtraktion auf den ganzen Zahlen ist weder kommutativ noch assoziativ:

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$

und

$$7 - (3 - 1) = 7 - 2 = 5 \neq 3 = 4 - 1 = (7 - 3) - 1.$$

Man kann aber jede Differenz als Summe auffassen: $a - b = a + (-b)$.

Die Addition und Multiplikation negativer Zahlen erfüllt weiterhin die drei Rechengesetze, wobei

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) \text{ und } (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

gilt.

Rationale Zahlen

- ▶ Um Dividieren zu können und Relationen darzustellen nutzen wir *rationale Zahlen*, auch *Brüche* genannt.
- ▶ Gekennzeichnet werden sie durch das Symbol \mathbb{Q} .
- ▶ In Mengenschreibweise gilt also

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0 \right\}$$

- ▶ Wir nennen p den *Zähler* und q den *Nenner*.

Rationale Zahlen in Kommaschreibweise

- ▶ Die ganzen Zahlen sind eine *Teilmenge* der rationalen Zahlen.
- ▶ Jeder Bruch lässt sich durch Ausführen der Division in eine Dezimalzahl umwandeln.
- ▶ Diese hat entweder endlich viele Nachkommastellen oder ist periodisch.

Beispiele

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{2}{13} = 0,153846153846153846\dots$$

$$\frac{35}{7} = 5,0$$

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Multipliziert man Zähler und Nenner eines Bruches mit der gleichen, von Null verschiedenen Zahl, so ändert sich sein Wert nicht.

In Formeln:

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a} \quad \text{für alle } a \neq 0.$$

Enthalten Zähler und Nenner eines Bruches den gleichen von Null verschiedenen Faktor, so kann man beide durch diesen Faktor dividieren, ohne den Wert des Bruchs zu verändern.

In Formeln:

$$\frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{p}{q} \quad \text{für alle } a \neq 0.$$

Summe zweier Brüche

Die *Summe zweier Brüche* ist gegeben durch

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2} + \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

Haben die beiden Brüche nicht den selben Nenner, so müssen sie erst zum selben Nenner erweitert werden.

Beispiel

Die Summe zweier Brüche mit gleichem Nenner ist

$$\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q} = \frac{p_1 + p_2}{q}$$

Produkt zweier Brüche

Das *Produkt zweier Brüche* wird wie folgt berechnet:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

Beispiel

Für $a \in \mathbb{Z}$ und $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ist

$$a \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{q}$$

Die Addition und die Multiplikation auf der Menge \mathbb{Q} erfüllen alle Rechengesetze.

Dividieren von Brüchen

Der Kehrbruch nimmt für die Multiplikation die selbe Rolle ein, wie die Gegenzahl für die Addition.

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrbruch multipliziert:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

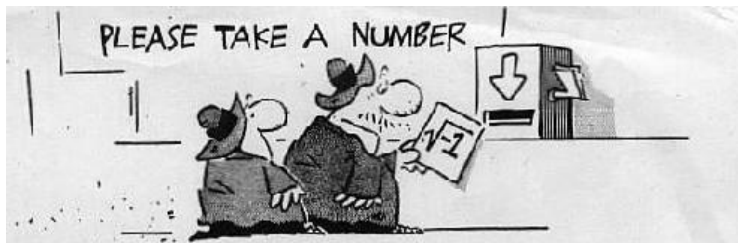
Ähnlich wie die Subtraktion ist die Division nicht kommutativ und nicht assoziativ, jeder Quotient kann aber per Definition als Produkt aufgefasst werden.

Reelle Zahlen

- ▶ Zahlen, die nicht rational sind, nennt man *irrationale Zahlen*.
- ▶ Die dazugehörige Dezimaldarstellung kann näherungsweise bestimmt werden. Sie ist nicht periodisch und nicht abbrechend.
- ▶ Ein Beispiel ist $\sqrt{2}$.
- ▶ Auch die Kreiszahl π und die eulersche Zahl e sind irrationale Zahlen.
- ▶ Die Zusammenfassung aller rationalen mit allen irrationalen Zahlen bezeichnet man als die Menge der *reellen Zahlen*.
- ▶ Ihr Symbol ist \mathbb{R} .

Hinweis

Alle Rechengesetze, die wir bisher für natürliche, ganze und rationale Zahlen herausgefunden haben, gelten unverändert auch für die reellen Zahlen.



Elementare Rechenmethoden

Mengen und Zahlen

Rechenregeln

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Notationen

Klammerregeln

- ▶ Rechenoperationen, die durch Klammern eingeschlossen werden, sind stets zuerst auszuführen.
- ▶ Sind Klammern geschachtelt, so ist zuerst die innerste aufzulösen.

Beispiel

$$-(3 - 5) \cdot (-2 + 4) = -(-2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

und

$$-(18 - (2 + 15)) = -(18 - 17) = -1$$

Für alle reellen Zahlen a, b, x und y ist

$$(a + b) \cdot (x + y) = ax + bx + ay + by$$

Zusammenfassen gleichnamiger Terme

- ▶ Buchstaben in Formeln werden *Variablen*, *Unbekannte* oder *Parameter* genannt.
- ▶ Ein mathematischer Ausdruck mit Variablen heißt *Term*.
- ▶ Terme heißen *gleichnamig*, wenn sie dieselben Variablen enthalten.
- ▶ Nach dem Ausmultiplizieren von Klammern sollten stets gleichnamige Terme zusammengefasst werden.
- ▶ Die Umformung einer Summe der Form $ax + ay$ in die Form $a \cdot (x + y)$ nennt man *Ausklammern* des Faktors a aus der Summe.

Binomische Formeln

Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

PETER

1.21

4b) Expand

~~$x^3 + x - 2$~~

$(a+b)^n$ *Very young Peter.*

$= (a + b)^n$

$= (a + b)^n$

$= (a + b)^n$

~~$= (a + b)^n$~~

etc...

Elementare Rechenmethoden

Mengen und Zahlen

Rechenregeln

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Notationen

Potenzierung mit natürlichen Zahlen

Ist a eine beliebige Zahl und n eine natürliche Zahl, so ist a^n definiert als das n -fache Produkt von a mit sich selbst:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}}$$

- ▶ Man nennt a die *Basis* und n den *Exponenten* von a^n .
- ▶ a^n wird als die *n -te-Potenz* von a bezeichnet.
- ▶ Per Definition gilt $a^0 = 1$, sofern $a \neq 0$ gilt.

Potenzgesetze

Für alle von null verschiedenen Zahlen a und b und alle natürlichen Zahlen m und n gelten die folgenden Gleichungen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (\text{P1})$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \quad (\text{P2})$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (\text{P3})$$

Dies gilt auch für negative Exponenten.

Für alle ganzen Zahlen n und alle $a \neq 0$ gilt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{P4})$$

Potenzen mit Stammbruch im Exponenten - Wurzeln

- ▶ Für jede positive Zahl a ist $a^{\frac{1}{2}}$ definiert als diejenige positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.
- ▶ $a^{\frac{1}{2}}$ wird als *Quadratwurzel* oder einfach *Wurzel* aus a bezeichnet.
- ▶ Das Symbol dafür lautet \sqrt{a} :

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

- ▶ Dies ist im Allgemeinen keine ganze Zahl, häufig noch nicht einmal eine rationale.
- ▶ Für jede positive Zahl a ist $a^{\frac{1}{n}}$ genauso definiert als diejenige positive Zahl, die n -mal mit sich selbst multipliziert a ergibt.
- ▶ $a^{\frac{1}{n}}$ wird als *n -te Wurzel* aus a bezeichnet.
- ▶ Das Symbol dafür lautet $\sqrt[n]{a}$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Potenzieren mit rationalen und irrationalen Zahlen

Für eine beliebige positive Zahl a bezeichnet der Ausdruck $a^{\frac{p}{q}}$ die p -te Potenz aus der q -ten Wurzel aus a :

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

Daher gilt für alle positiven Zahlen a und rationale Exponenten $\frac{p}{q}$

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Für eine beliebige positive Zahl a und reelle Zahl x kann man dem Ausdruck a^x durch Annäherung von x mit rationalen Zahlen einen Sinn geben.

Hinweis

Die Potenzgesetze gelten für alle positiven a und reellen Zahlen x .

Beispiel: Kapitalanlage

Für ein Kapital K bei einem Zinssatz p in Prozent gilt für das Kapital nach einem Jahr

$$K + \frac{p}{100} \cdot K = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

was bei 100€ und 3% $100 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 100 \cdot 1,03 = 103€$ macht.

Nach 2 Jahren werden dies also

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

und nach n Jahren

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dabei kann n jede Zahl aus \mathbb{R}^+ sein, z.B. nach 2,5 Jahren

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{30}{12}}$$

Beispiel: Halbwertszeit

Die Halbwertszeit gibt bei radioaktiven Materialien die Zeit an, bis zu der die Hälfte des Materials zerfallen ist.

Sei M die Masse zu Beginn, dann ist nach der Halbwertszeit noch $\frac{M}{2}$, nach zwei Halbwertszeiten $\frac{M}{4}$ und nach n Halbwertszeiten

$$M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

übrig.

Logarithmus zur Basis a

Es seien a und x positive reelle Zahlen. Diejenige reelle Zahl y , für die

$$a^y = x$$

gilt, nennt man *Logarithmus von x zur Basis a* und bezeichnet sie mit

$$\log_a(x)$$

Seien x, y, p reelle Zahlen und a eine positive Basis. Dann gilt

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (\text{L1})$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad (\text{L2})$$

$$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x) \quad (\text{L3})$$

Umrechnung von Logarithmen zu verschiedenen Basen

Seien a, b positive, von 1 verschiedene reelle Zahlen und x positiv. Dann gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (\text{L4})$$

Logarithmus naturalis

Der häufigst verwendete Logarithmus ist der zur Basis e , genannt *natürlicher Logarithmus* oder *Logarithmus naturalis*:

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Elementare Rechenmethoden

Mengen und Zahlen

Rechenregeln

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Notationen

Summenschreibweise

- ▶ Zum Abkürzen von Termen nutzt man häufig Pünktchen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{16}$$

- ▶ Im Falle von Summen gibt es dafür die folgende Schreibweise:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{16} = \sum_{i=1}^{16} a_i$$

- ▶ Beispiele:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} = \sum_{i=0}^4 a_{2^i}$$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 200 = \sum_{i=1}^{100} 2i$$

Summenschreibweise, die Zweite

- ▶ Die *Leere Summe* wird als null definiert:

$$\sum_{i=n}^m a_i = 0, \quad \text{falls } n > m$$

- ▶ Summen können auch geschachtelt werden:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

Diese Summe hat insgesamt $m \cdot n$ Summanden.

Beispiel

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=-i}^{i-2} a_{i,j} &= \sum_{j=-1}^{-1} a_{1,j} + \sum_{j=-2}^0 a_{2,j} + \sum_{j=-3}^1 a_{3,j} = a_{1,-1} + (a_{2,-2} + a_{2,-1} + a_{2,0}) \\ &\quad + (a_{3,-3} + a_{3,-2} + a_{3,-1} + a_{3,0} + a_{3,1}) \end{aligned}$$

Produktschreibweise

- ▶ Analog zu Summen gibt es auch abgekürzte Produkte:

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

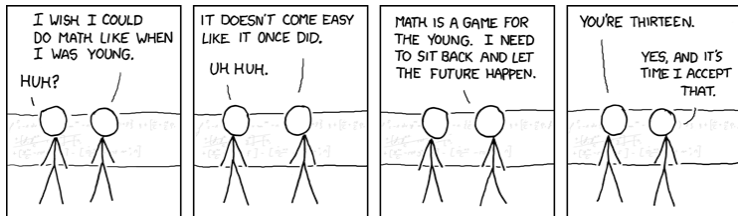
- ▶ Das leere Produkt wird hier mit eins definiert:

$$\prod_{i=n}^m a_i = 1, \quad \text{falls } n > m$$

- ▶ Für jede natürliche Zahl n ist die Fakultät definiert durch

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Dabei gilt $0! = 1$.



Geometrie

Dreiecke und Trigonometrie

Ebene geometrische Figuren

Dreiecke

- ▶ Ein *Dreieck* Δ besteht aus 3 *Eckpunkten* A, B, C , die nicht auf einer Gerade liegen.
- ▶ Die Strecken zwischen den Eckpunkten heißen *Seiten* von Δ .
- ▶ Die Winkel α, β, γ innerhalb von Δ heißen *Innenwinkel* von Δ .
- ▶ Die Winkel α', β', γ' heißen *Außenwinkel* (nächste Folie).

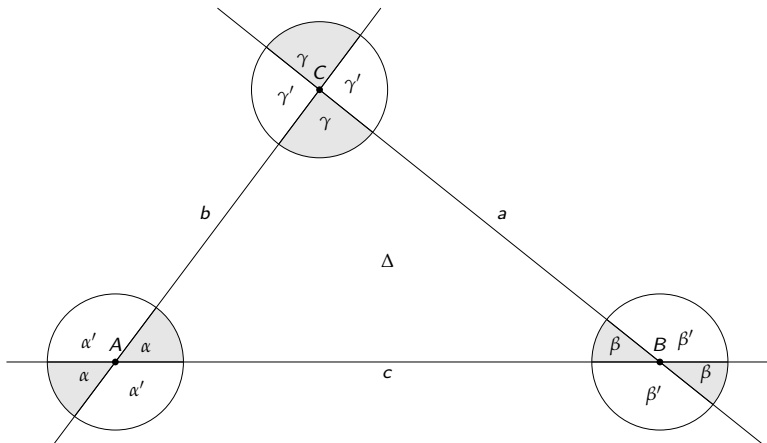


Abbildung: Die Punkte, Seitenlängen und Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks

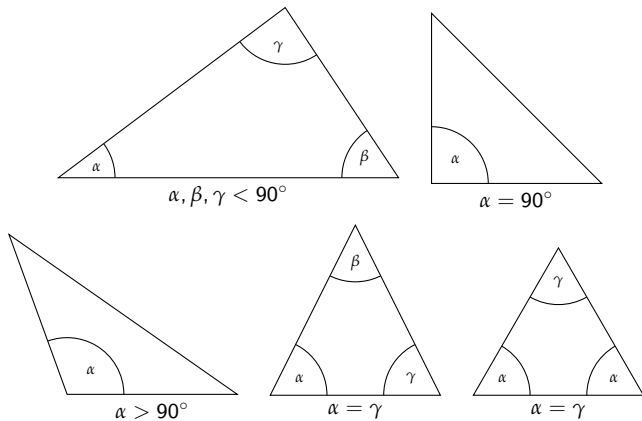


Abbildung: Klassen von Dreiecken: spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig, gleichschenkelig und gleichseitig

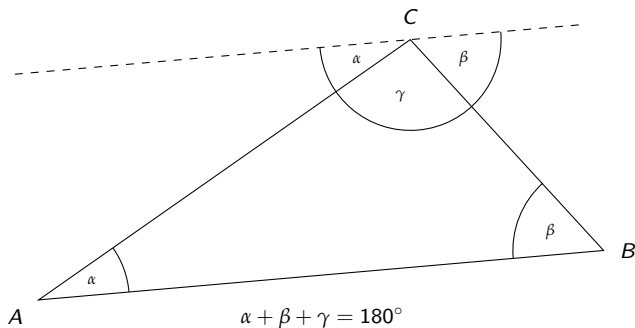
Dreiecksungleichung

Die Summe der Länge zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist stets größer als die Länge der verbleibenden Seite c :

$$a + b > c$$

Summe der Winkel am Dreieck

Die Summe der Innenwinkel α, β, γ eines Dreiecks ist stets 180° . Die Summe der Außenwinkel α', β', γ' eines Dreiecks ist stets 360° .



Transversale

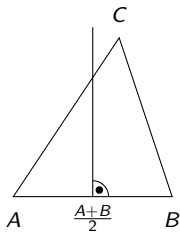
Transversale werden Geraden genannt, die Dreiecke schneiden.

Mittelsenkrechte gehen durch den Mittelpunkt einer Seite und stehen *senkrecht* auf dieser.

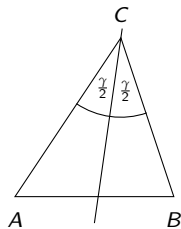
Winkelhalbierende halbieren den Winkel an einem Eckpunkt.

Seitenhalbierende verlaufen durch den Mittelpunkt einer Seite und eine Ecke.

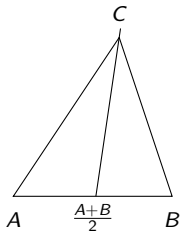
Höhen gehen durch einen Eckpunkt eines Dreiecks und stehen senkrecht auf einer Seite.



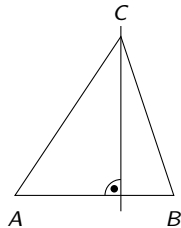
Mittelsenkrechte



Winkelhalbierende



Seitenhalbierende



Höhe

Schnitte

Schnitt der Mittelsenkrechten und Umkreis

Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $S_{MS} = UMP$.

Schnitt der Winkelhalbierenden und Inkreis

Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $S_{WH} = IMP$.

Schnitt der Seitenhalbierenden

Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks Δ schneiden sich im *Schwerpunkt* $S_{SH} = SP = (A + B + C)/3$ des Dreiecks. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (von der Ecke aus gesehen).

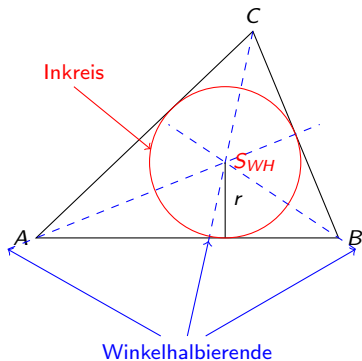
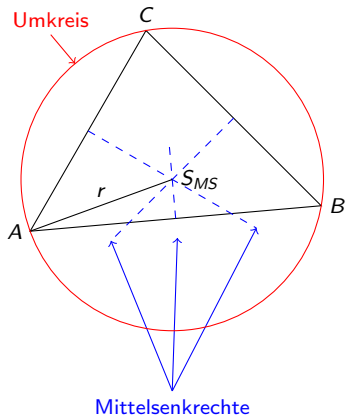


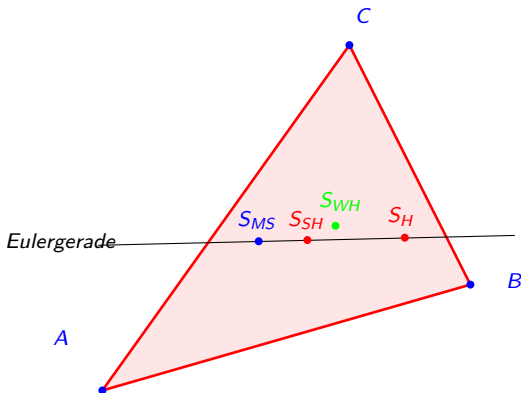
Abbildung: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises (links), während sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks im Mittelpunkt des Inkreises schneiden (rechts).

Höhenschnittpunkt und Eulergerade

Auch die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S_H .

Eulergerade

Die Punkte S_H , S_{SH} und S_{MS} liegen auf einer Geraden, genannt Eulergerade. Die Strecke von S_H zu S_{SH} ist dabei immer doppelt so groß wie die Strecke von S_{SH} zu S_{MS} .

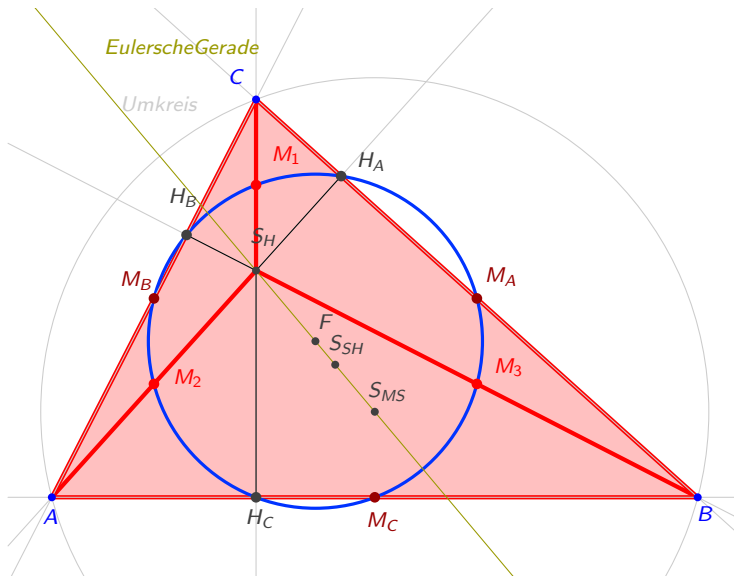


Feuerbach'scher Kreis

Feuerbach'scher Kreis

Die Seitenmittelpunkte, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der Strecken von den Ecken zu S_H liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt auf der Mitte zwischen S_H und S_{MS} und Radius der Hälfte des Umkreisradius.

Dieser Kreis wird Neun-Punkt-Kreis oder Feuerbach'scher Kreis genannt.



Flächeninhalt

Flächeninhalt des Dreiecks

Der Flächeninhalt eines Dreiecks F ist die Hälfte des Produkts der Länge einer Höhe h mit der Länge c der Seite, auf der die Höhe senkrecht steht:

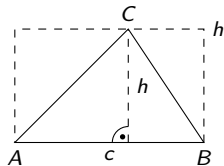
$$F = \frac{hc}{2}$$

Herons Formel

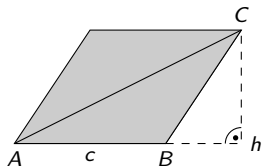
Der Flächeninhalt eines Dreiecks F mit Seitenlängen a , b und c ist

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

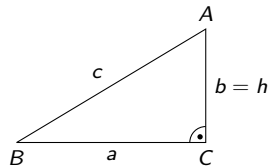
wobei $s = (a + b + c)/2$ ist.



$$F = \frac{hc}{2}$$



$$F = hc$$



$$F = \frac{ab}{2}$$

Abbildung: Der Flächeninhalt jedes Dreiecks Δ mit den Eckpunkten A, B und C ist die Hälfte des Flächeninhalts eines Rechtecks mit den Seitenlängen h und c (links). Die Formel gilt auch, wenn die Höhe außerhalb von Δ liegt, und somit ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms hc (Mitte). Für rechtwinklige Dreiecke vereinfacht sich die Anwendung dieser Formel, denn man muss die Länge der Höhe nicht berechnen: Der Flächeninhalt des Dreiecks ist dann die Hälfte des Produkts der Längen der Katheten des Dreiecks (rechts).

Rechtwinklige Dreiecke

Bei rechtwinkligen Dreiecken werden die beiden kurzen Seiten *Katheten* und die lange Seite *Hypotenuse* genannt.

Satz des Pythagoras

Die Summe der Quadrate der Längen der Katheten a, b ist dann stets gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse c :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Höhensatz

Das Quadrat der Höhe h auf der Hypotenuse ist gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte p und q :

$$h^2 = p \cdot q$$

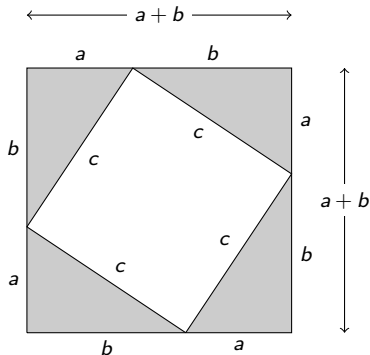
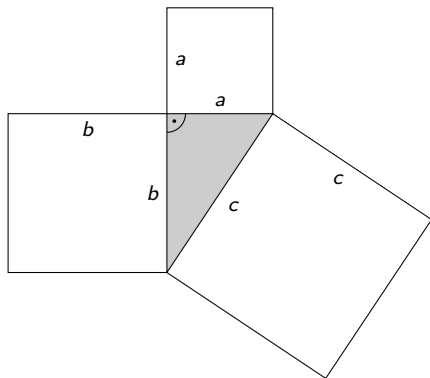


Abbildung: Veranschaulichung des Satzes von Pythagoras (links) und eine der etwa 100 bekannten Herleitungen dieser Aussage (rechts).

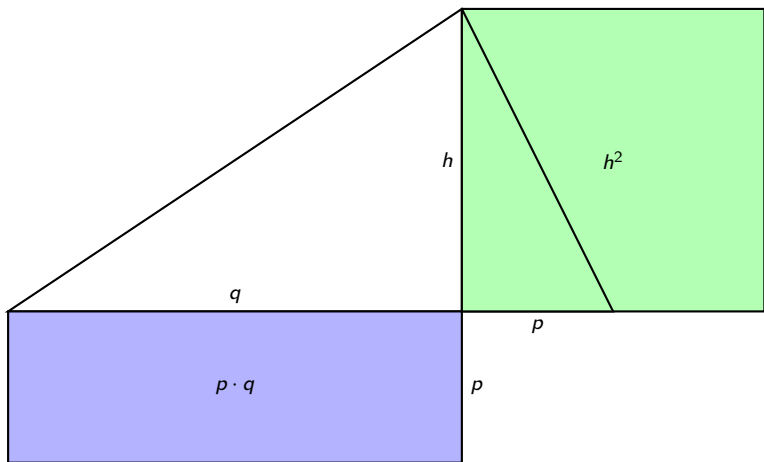


Abbildung: Veranschaulichung des Höhensatzes

Satz des Thales

Für rechtwinklige Dreiecke ist der Umkreismittelpunkt S_{SH} der Mittelpunkt der Hypotenuse c . Der Umkreis hat also den Radius $c/2$.

Satz des Thales

Die Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises sind rechte Winkel.

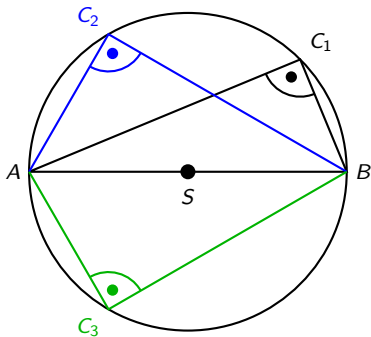
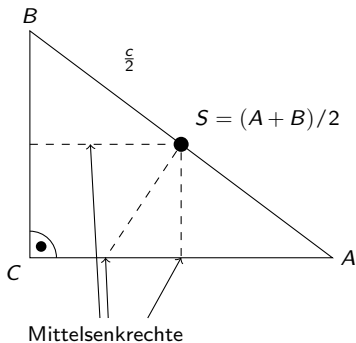


Abbildung: Für rechtwinklige Dreiecke ist der Mittelpunkt des Umkreises (Schnitt der Mittelsenkrechten) der Mittelpunkt $S = (A + B)/2$ von deren Hypotenuse (links). Rechts eine Darstellung des Satzes von Thales.

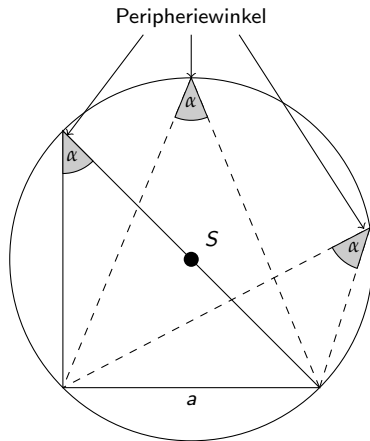


Abbildung: Die Peripheriewinkel über einem festen Kreisbogen sind stets gleich. Die Dreiecke haben die gemeinsame Seite mit der Länge a über dem festen Kreisbogen - deshalb ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel stets α .

Sinus, Cosinus und Tangens

- ▶ Der Quotient aus der Länge der *Gegenkathete* a und der Hypotenuse c wird als *Sinus* des Winkels α bezeichnet:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

- ▶ Der Quotient aus der Länge der *Ankathete* b und der Hypotenuse c wird als *Cosinus* des Winkels α bezeichnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

- ▶ Der Quotient aus der Länge der Gegenkathete a und der Ankathete b wird als *Tangens* des Winkels α bezeichnet:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

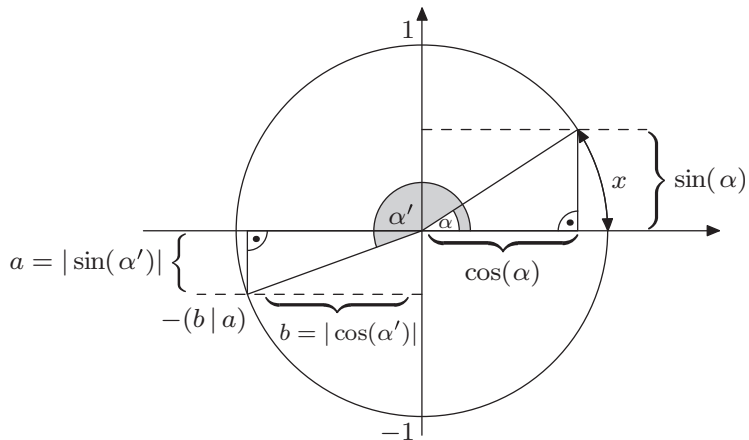


Abbildung: Veranschaulichung des Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Summe der Quadrate des Sinus und Cosinus

Für jeden Winkel α gilt

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Wertebereich

Die Werte von Sinus und Cosinus liegen immer zwischen -1 und 1:

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

α	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(\alpha)$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Cosinussatz

Für beliebige Dreiecke ist das Quadrat der Länge a einer Seite die Differenz der Summe der Quadrate der Längen b, c der verbleibenden Seiten mit dem Term $2bc \cos(\alpha)$, wobei α der von den Seiten mit den Längen b und c eingeschlossene Winkel ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Sinussatz

Für beliebige Dreiecke mit Seitenlängen a, b und c und den entsprechenden gegenüberliegenden Innenwinkeln α, β und γ gilt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Additionstheoreme des Sinus und Cosinus

Für alle α und β gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (1. \text{ Additionstheorem})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (2. \text{ Additionstheorem})$$

Bogenmaß

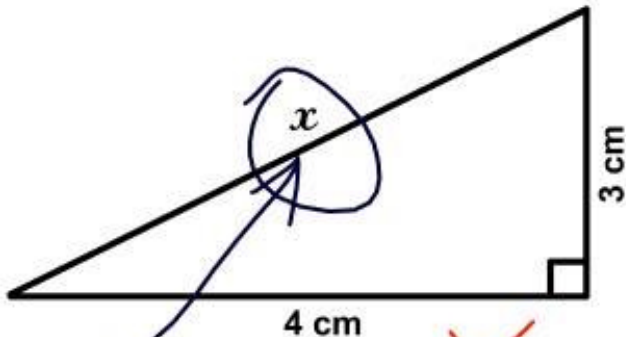
Mit Sinus/Cosinus ist es oft praktischer, den Winkel im Bogenmaß anzugeben.

Bogenmaß

Das Bogenmaß x eines Winkels α ist die vorzeichenbelegte Länge des zu α gehörigen Bogens am Einheitskreis, wobei das Vorzeichen von x genau dann positiv ist, wenn der Bogen gegen den Uhrzeigersinn abgetragen wird. Die Umrechnungsformel zwischen Grad- und Bogenmaß ist

$$x = \pi \frac{\alpha}{180^\circ}$$

3. Find x .



Here it is



Geometrie

Dreiecke und Trigonometrie

Ebene geometrische Figuren

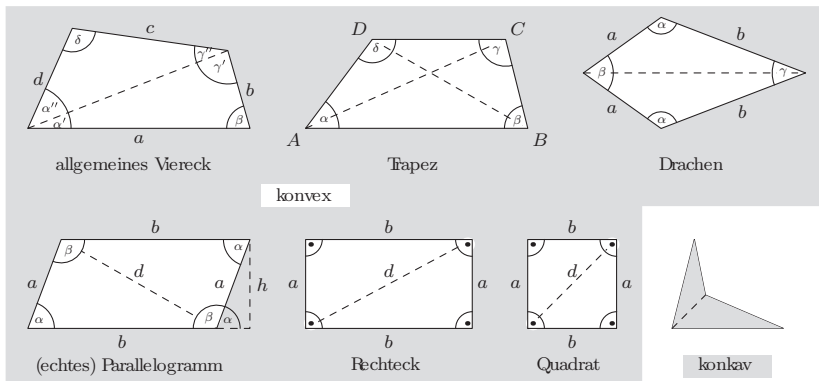


Abbildung: Klassifizierung von Vierecken

Winkel und Diagonalen im Viereck

Die Summe der Innenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Vierecks ist stets 360° .

Die Länge d der Diagonalen bei

- ▶ Quadraten mit Seitenlänge a ist

$$d = \sqrt{2}a$$

- ▶ Rechtecken mit Seitenlängen a und b ist

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- ▶ Parallelogrammen mit Seitenlängen a und b und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel α ist

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}$$

Flächeninhalt von Parallelogrammen

Der Flächeninhalt F eines Parallelogramms mit Seitenlängen a und b und von diesen Seiten eingeschlossenem Winkel α ist

$$F = \sin(\alpha)ab.$$

Spezieller ist der Flächeninhalt eines Rechtecks ($\alpha = 90^\circ$) $F = ab$ und der Flächeninhalt eines Quadrats ($\alpha = 90^\circ$ und $a = b$) $F = a^2$.

Flächeninhalt des Trapezes

Der Flächeninhalt F eines Trapezes mit Seitenlängen a und b der parallelen Seiten und der Höhenlänge h ist

$$F = (a + b) \frac{h}{2}$$

Flächeninhalt und Umfang des Kreises

Flächeninhalt des Kreises

Der Einheitskreis hat den Flächeninhalt $F = \pi$. Ein beliebiger Kreis mit Radius r hat den Flächeninhalt

$$F = \pi r^2.$$

Umfang des Kreises

Der Einheitskreis hat den Umfang 2π . Ein beliebiger Kreis mit Radius r hat den Umfang

$$U = 2\pi r.$$

Kreisgleichung

Punkte in der Eben kann man durch ihre Koordinaten angeben.

Punktabstand

Der Abstand zweier Punkte lässt sich aus den Koordinaten berechnen durch

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Gleichung eines Kreises

Der Kreis mit Mittelpunkt $(x_1 | y_1)$ und Radius r hat die Gleichung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2.$$

Die Menge aller Punkte $(x|y)$, die die Gleichung erfüllen, bildet den Kreis.

Ellipsen

Ellipsen sind die Menge aller Punkte $(x|y)$, für die die Summe $r_1 + r_2$ der Abstände zu zwei festen *Brennpunkten* $A = (a_1|a_2)$ und $B = (b_1|b_2)$ den konstanten Wert $2r$ hat.

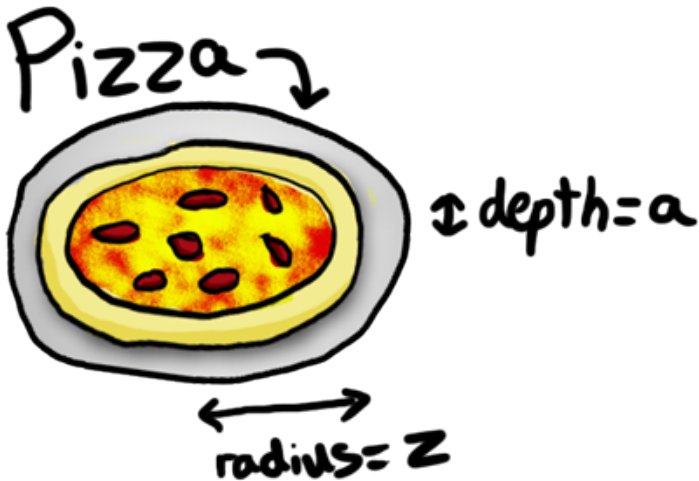
Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass beide Brennpunkte auf der x -Achse liegen und der Mittelpunkt im Ursprung. Der Abstand der Brennpunkte sei $2c$.

Die Ellipse ist dann gegeben durch alle Punkte $(x|y)$ mit

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2r.$$

Es ergibt sich die alternative *Mittelpunktsgleichung*

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{mit } b^2 = r^2 - c^2.$$



$$\text{Volume} = \pi \cdot z \cdot z \cdot a$$

Funktionen

Definitionsbereich, Wertevorrat, Bildmenge

Verkettung, Umkehrbarkeit, Monotonie

Potenz- und Wurzelfunktionen

Polynome und rationale Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Nachtrag: Intervalle

Seien a, b reelle Zahlen mit $a \leq b$.

- ▶ Die Menge aller Zahlen zwischen a und b wird *Intervall* mit den Grenzen a und b genannt.
- ▶ Sind a und b enthalten, so sprechen wir von einem *abgeschlossenen Intervall*:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq x \leq b\}$$

- ▶ Sind a und b nicht enthalten, so sprechen wir von einem *offenen Intervall*:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a < x < b\}$$

- ▶ Die Mischformen heißen *halboffene Intervalle*:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq x < b\}$$

Definition von Funktion

D und W seien nicht leere Mengen (nicht notwendigerweise von Zahlen).

- ▶ Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die jedem Element x der Menge D auf eindeutig bestimmte Art und Weise genau ein Element y der Menge W zuordnet.
- ▶ D wird *Definitionsbereich* genannt.
- ▶ y wird *Funktionswert* von x genannt, abgekürzt $y = f(x)$.
- ▶ W wird *Wertevorrat* genannt.
- ▶ Anschaulich schreibt man

$$f : D \rightarrow W.$$

- ▶ Ähnlich wie bei Mengendefinitionen kann man die Zuordnungsvorschrift entweder einzeln oder als allgemeine Regel hinschreiben.

Der Wertevorrat muss nicht ausgeschöpft werden.

W enthält alle *potenziellen* Funktionswerte, nicht alle davon müssen auftreten.

Die Menge aller auftretenden Funktionswerte wird als *Bildmenge* von f bezeichnet, symbolisiert durch $f(D)$.

Vorschriften, die keine Funktionen sind

- ▶ Sei $D = \mathbb{R}$, $W = \{-1, 1\}$ und für alle $x \in D$

$$f(x) = 1 \text{ oder } -1, \text{ je nachdem wie ich mich fühle}$$

- ▶ Sei $D = \{-1, 1\}$, $W = \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow W$ gegeben durch $-1 \mapsto \pi$, $1 \mapsto 0$, $-1 \mapsto 1$.
- ▶ Da Wurzeln natürlicher Zahlen i.A. keine natürlichen Zahlen sind, ist auch dies keine Funktion:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

- ▶ Umgekehrt ist aber die Wurzel aus einer negativen Zahl in \mathbb{R} nicht definiert, deswegen ist

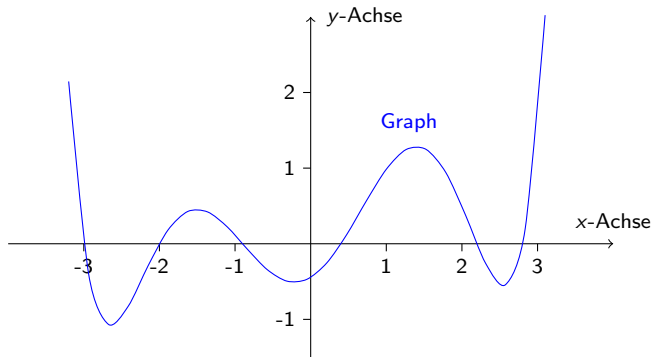
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

keine Funktion.

Graph einer Funktion

Der Graph einer Funktion ist die Menge aller Punkte $(x, f(x))$ für $x \in D$.

Sind D und W in den reellen Zahlen, so kann zur Veranschaulichung einer Funktion ihren Graph in ein kartesisches Koordinatensystem zeichnen:



Funktionen

Definitionsbereich, Wertevorrat, Bildmenge

Verkettung, Umkehrbarkeit, Monotonie

Potenz- und Wurzelfunktionen

Polynome und rationale Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Verkettung von Funktionen

Es seien $f : F \rightarrow W$ und $g : D \rightarrow G$ zwei Funktionen, wobei der Bildbereich $g(D)$ im Definitionsbereich F von f liegen soll.

Dann heißt

$$f \circ g : D \rightarrow W, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

für alle $x \in D$ die *Verkettung* von f und g . Dabei wird erst g und danach f angewandt.

Dies wird auch *Hintereinanderausführung* oder *Komposition* genannt.

Beispiel

$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$ und $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = y + 100$. Dann ist $f \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = 3x + 100$ und $(f \circ g)([0, 1]) = [100, 103]$.

Umkehrfunktion

Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich D und der Bildmenge $f(D)$. Eine Funktion f^{-1} , deren Definitionsbereich $f(D)$ ist und die die Eigenschaft

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

für alle $x \in D$ hat, heißt *Umkehrfunktion* von f .

Existiert zu einer Funktion f eine Umkehrfunktion, so nennt man f selbst *umkehrbar*.

Hinweis

Nicht jede Funktion ist umkehrbar. Z.B. ist die auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion $f(x) = x^2$ nicht umkehrbar.

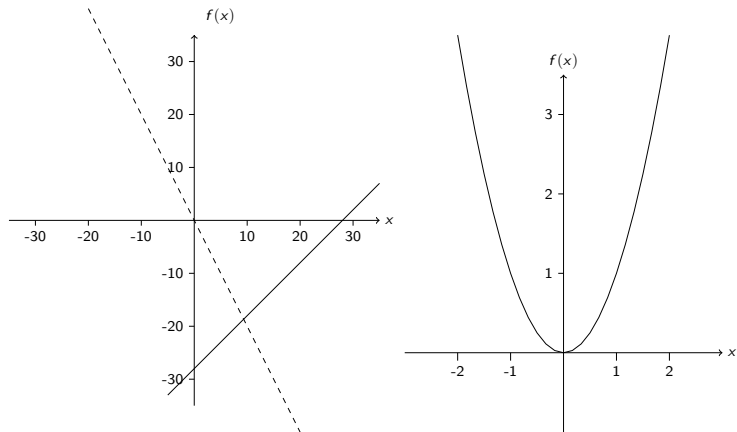


Abbildung: Die Funktionen $f_1(x) = x - 28$ (links, schwarz), $f_2(x) = -2x$ (links, gestrichelt) und $f_3(x) = x^2$ (rechts)

Monotone Funktionen

Sei f eine Funktion und I eine Teilmenge des Definitionsbereichs D von f .

- ▶ Man nennt f *monoton steigend* auf I , wenn gilt

$$\text{Ist } x_1 < x_2, \text{ so ist } f(x_1) \leq f(x_2)$$

- ▶ Man nennt f *monoton fallend* auf I , wenn gilt

$$\text{Ist } x_1 < x_2, \text{ so ist } f(x_1) \geq f(x_2)$$

- ▶ Eine Funktion heißt *monoton*, wenn sie monoton steigend oder fallend ist.
- ▶ Sind die Ungleichungen strikt, so spricht man von streng monoton steigend bzw fallend und streng monotonen Funktionen.

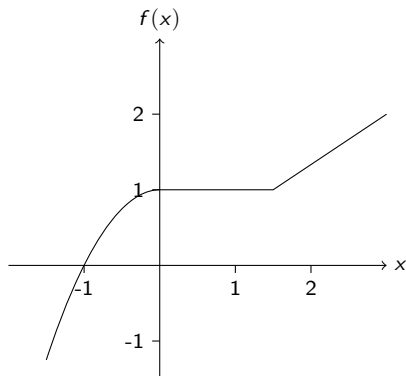


Abbildung: Eine monoton steigende Funktion

Strenge Monotonie und Umkehrbarkeit

Sei $f : D \rightarrow W$ eine auf ganz D streng monotone Funktion mit Bildmenge $f(D)$. Dann existiert eine auf $f(D)$ definierte Umkehrfunktion f^{-1} von f .

Ist f streng monoton steigend, so ist auch f^{-1} streng monoton steigend, ist f streng monoton fallend, so auch f^{-1} .

Funktionen

Definitionsbereich, Wertevorrat, Bildmenge

Verkettung, Umkehrbarkeit, Monotonie

Potenz- und Wurzelfunktionen

Polynome und rationale Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Potenzfunktionen

Für jede natürliche Zahl n nennt man die Funktion

$$p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_n(x) = x^n$$

Potenzfunktion mit dem Exponenten n oder auch einfach n -te Potenzfunktion.

- ▶ Potenzfunktionen $p_n(x)$ mit geradem n können geschrieben werden als

$$p_n(x) = x^n = x^{2m}$$

- ▶ Da $x^2 = (-x)^2$ gilt, ist $p_2(x) = x^2$ symmetrisch zur y -Achse.
- ▶ Da $x^{2m} = (x^m)^2$ gilt, sind demnach alle Potenzfunktionen mit geradem n symmetrisch zur y -Achse und verlaufen nicht im negativen Bereich.
- ▶ Insbesondere sind diese nicht umkehrbar auf ganz \mathbb{R} , wohl aber auf \mathbb{R}^+ und \mathbb{R}^- .
- ▶ Ist n ungerade, so kann p_n geschrieben werden als

$$p_n(x) = x^n = x^{2m+1} = x^{2m} \cdot x$$

- ▶ Diese Potenzfunktionen sind alle punktsymmetrisch im Ursprung und umkehrbar auf \mathbb{R} .

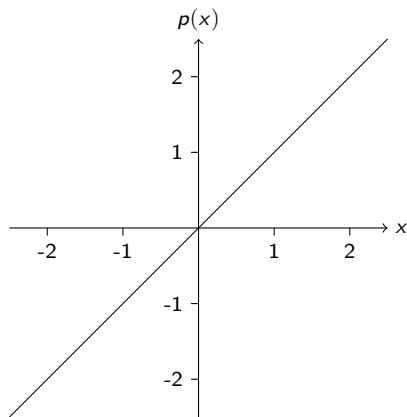


Abbildung: Die Funktion $p_1(x) = x$

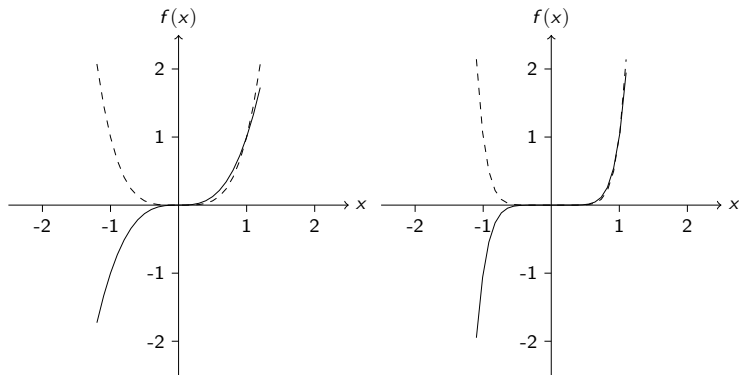


Abbildung: Einige Potenzfunktionen: x^3 (links, schwarz), x^4 (links, gestrichelt), x^7 (rechts, schwarz), x^8 (rechts, gestrichelt)

n-te Wurzelfunktion

Die Funktion $w_n(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, nennt man die n -te Wurzelfunktion.

Sie ist definiert auf \mathbb{R} (falls n ungerade) bzw \mathbb{R}^+ (falls n gerade).

Negative Wurzeln

Für ungerades n und negatives x gilt

$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x},$$

Die Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen auf \mathbb{R} (falls n ungerade) bzw \mathbb{R}^+ (falls n gerade).

Funktionen

Definitionsbereich, Wertevorrat, Bildmenge

Verkettung, Umkehrbarkeit, Monotonie

Potenz- und Wurzelfunktionen

Polynome und rationale Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Polynome

Es sei n eine natürliche Zahl oder null und es seien a_0, a_1, \dots, a_n reelle Zahlen. Eine Funktion $p(x)$, die sich in der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

darstellen lässt, nennt man ein *Polynom* vom Grad höchstens n . Die Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n heißen die *Koeffizienten* des Polynoms.

Spezielle Polynome

Ein Polynom der Form $p(x) = a$ heißt *konstante Funktion* und ein Polynom der Form $p(x) = ax + b$ heißt *lineare Funktion*.

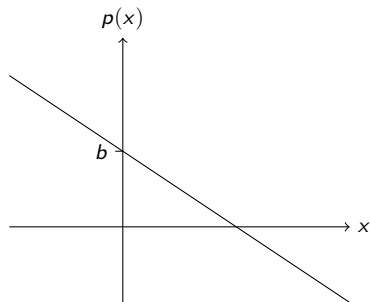


Abbildung: Lineare Funktion mit y -Achsenabschnitt b

Parabeln

- ▶ Ein Polynom der Form $p(x) = ax^2 + bx + c$ heißt *Parabel*.
- ▶ Ist der Koeffizient von x^2 positiv, so ist die Parabel nach oben geöffnet.
- ▶ Ist der Koeffizient von x^2 negativ, so ist die Parabel nach unten geöffnet.
- ▶ Ist der Koeffizient von x^2 null, so ist die Parabel zu einer Gerade degeneriert.

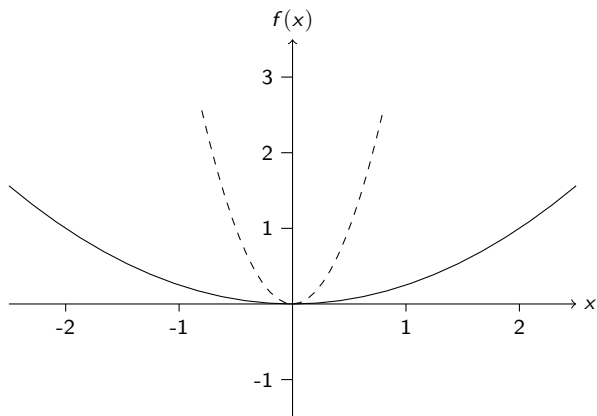


Abbildung: Die Parabeln $\frac{1}{4}x^2$ (schwarz) und $4x^2$ (gestrichelt)

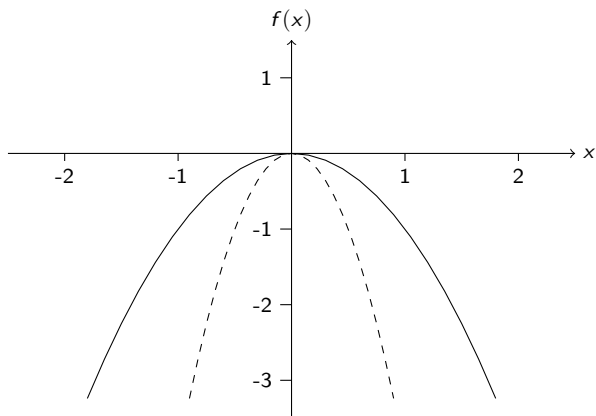


Abbildung: Die Parabeln $-x^2$ (schwarz) und $-4x^2$ (gestrichelt)

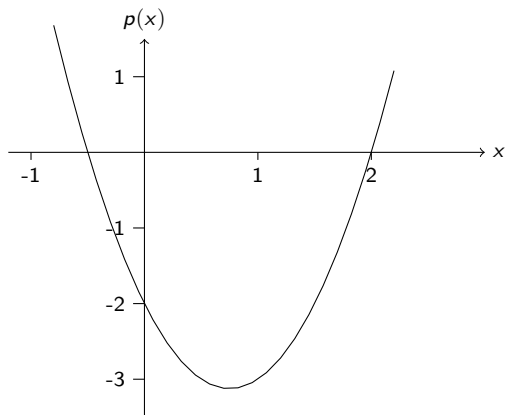


Abbildung: Die Funktion $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$

Nullstellen von Polynomen

Eine reelle Zahl \bar{x} heißt *Nullstelle* einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$f(\bar{x}) = 0$$

gilt.

Für jede natürliche Zahl n gilt: Ein Polynom vom Grad n , das nicht die Nullfunktion ist, hat höchstens n Nullstellen.

Rationale Funktion

Es seien p und q zwei Polynome und D eine Teilmenge der reellen Zahlen, die keine Nullstelle von q enthält.

Man nennt eine Funktion der Form

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine *rationale Funktion*.

Polstelle einer rationalen Funktion

Eine reelle Zahl \bar{x} , die Nullstelle des Nenners, aber nicht des Zählers einer gegebenen rationalen Funktion $r(x)$ ist, nennt man *Pol* oder auch *Polstelle* von $r(x)$.

Hinweis

Eine Polstelle gehört nicht zum Definitionsbereich der rationalen Funktion.

Hyperbel

Die rationale Funktion

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

heißt *Hyperbel* oder *Normalhyperbel*.

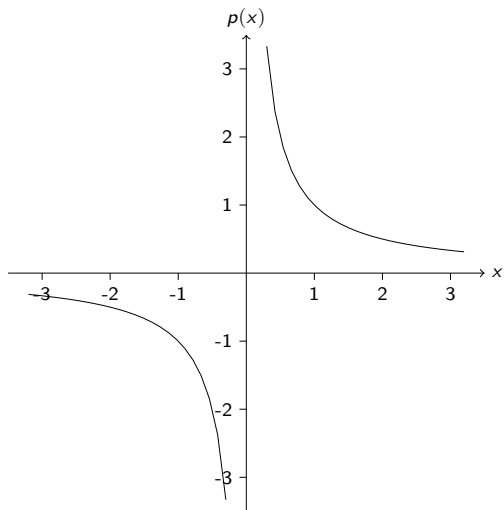


Abbildung: Die Hyperbel $\frac{1}{x}$

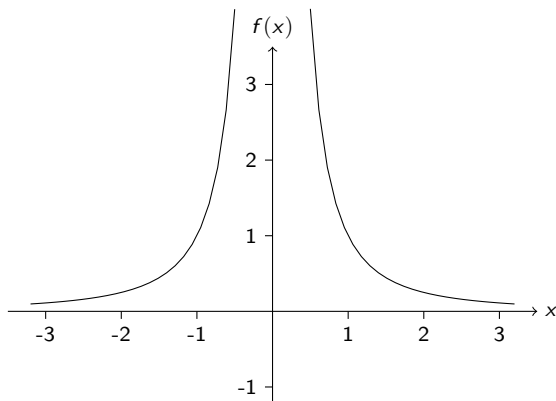


Abbildung: Die Funktion $\frac{1}{x^2}$



Funktionen

Definitionsbereich, Wertevorrat, Bildmenge

Verkettung, Umkehrbarkeit, Monotonie

Potenz- und Wurzelfunktionen

Polynome und rationale Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Exponentialfunktionen zu allgemeiner Basis

Fasst man die allgemeine Potenzfunktion mit reellem Exponenten als Funktion auf, so erhält man die sogenannte Exponentialfunktion:

Es sei a eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x$$

heißt *Exponentialfunktion* oder genauer *Exponentialfunktion zur Basis a* .

- ▶ Ist $a > 1$, so wächst $\exp_a(x) = a^x$ auf ganz \mathbb{R} streng monoton.
- ▶ Ist $a < 1$, so fällt $\exp_a(x) = a^x$ auf ganz \mathbb{R} streng monoton.
- ▶ Die Funktionswerte sind stets positive Zahlen.

Aufgrund der Potenzgesetze gilt immer

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \tag{E1}$$

$$\exp_a(-x) = \exp_{\frac{1}{a}}(x) \tag{E2}$$

Logarithmusfunktion zur Basis a

- ▶ Auch der Logarithmus kann als Funktion aufgefasst werden
- ▶ Der Definitionsbereich von $\log_a(x)$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen (\mathbb{R}^+).
- ▶ Falls $a > 1$ ist $\log_a(x)$ auf ganz \mathbb{R}^+ streng monoton wachsend.
- ▶ Falls $a < 1$ ist $\log_a(x)$ auf ganz \mathbb{R}^+ streng monoton fallend.
- ▶ Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Funktionen

Definitionsbereich, Wertevorrat, Bildmenge

Verkettung, Umkehrbarkeit, Monotonie

Potenz- und Wurzelfunktionen

Polynome und rationale Funktionen

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Sinus und Cosinus

Sinus und Cosinus fasst man üblicherweise als Funktionen vom Bogenmaß auf. Der Graph ist dann

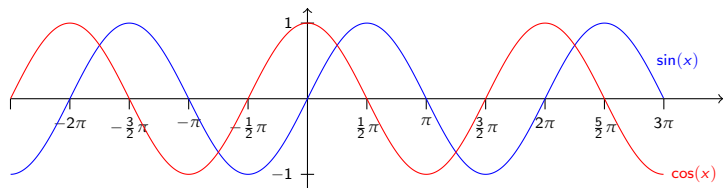


Abbildung: Sinus und Cosinus als Funktion des (reellen) Bogenmaßes x

Beobachtungen

- ▶ Sinus und Cosinus sind 2π -periodisch:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \quad \text{und} \quad \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

- ▶ Sinus und Cosinus besitzen unendlich viele Nullstellen:

$$\sin(x) = 0 \text{ genau dann wenn } x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = 0 \text{ genau dann wenn } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- ▶ Cosinus ist *achsensymmetrisch*: $\cos(x) = \cos(-x)$
Also ist Cosinus eine *gerade Funktion*.
- ▶ Sinus ist *punktsymmetrisch*: $\sin(x) = -\sin(-x)$
Also ist Sinus eine *ungerade Funktion*.
- ▶ Sinus und Cosinus lassen sich wie folgt ineinander umrechnen:

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{beziehungsweise} \quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Beautiful Dance Moves



$\sin(x)$



$\cos(x)$



$\tan(x)$



$\cot(x)$



$|x|$



x



x^2



x^2+y^2



\sqrt{x}



$\sqrt{-x}$



$\frac{1}{x}$



crap.

Differential- und Integralrechnung

Ableitungen

Kurvendiskussion

Integration

Allgemeines Konzept

Wir versuchen in diesem Kapitel, uns Funktionen der Form $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, also den *Graphen von f* , besser vorstellen zu können.

Dazu benötigen wir den Begriff der *Steigung von f* , auch bezeichnet als *erste Ableitung von f* .

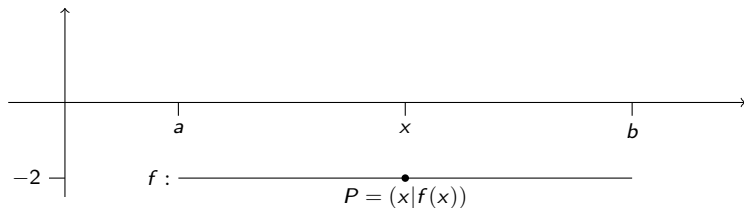


Abbildung: Wandervorschlag "Wattwanderung nördlich von Aurich": Die zugehörige Funktion f ist konstant -2 und somit ist 0 der Wert der Steigung von f an jeder Stelle x . Für diese f verschwindet also die Steigung überall.

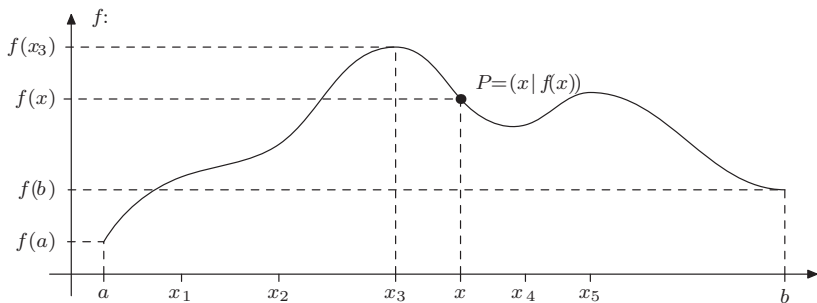


Abbildung: Wandervorschlag "Pfälzer Wald": Die Steigung von f ist nicht konstant, denn diese hängt von der Stelle x ab, an der man sich befindet.

Differenzialquotient und Tangente von f in x

Falls der Differenzenquotient von f in x für h gegen 0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert, so heißt dieser *Differenzialquotient von f in x* , und wird mit $f'(x)$ bezeichnet. Ist dies der Fall, so ist die reelle Zahl $f'(x)$ der Wert der Steigung von f in x und wird *erste Ableitung von f an der Stelle x* genannt. Man sagt dann, dass f in x (*einmal*) *ableitbar* ist.

Die lineare Funktion t durch den Punkt $(x|f(x))$ mit der Steigung $f'(x)$ bezeichnet man als *Tangente von f in x* .

In der Nähe einer Stelle x kann man eine Funktion durch ihre Tangente annähern:

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$$

Die Gerade durch die beiden Punkte $(x|f(x))$ und $(x+h|f(x+h))$ bezeichnet man als die *Sekante von f durch x und $x+h$* .

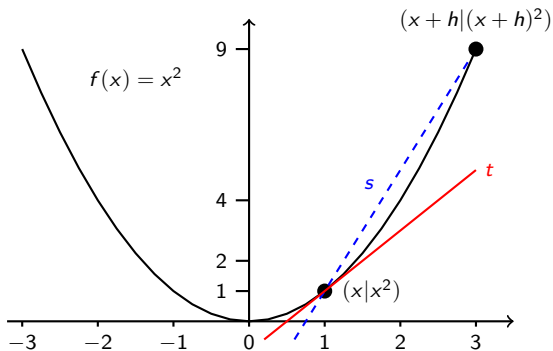


Abbildung: Der Wert der Steigung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 1$ ist 2. Das ist auch der Wert der Steigung der Tangente t an f in $x = 1$, welche sich als Grenzwert der Steigungen der Sekanten $2 + h$ für $h \rightarrow 0$ ergibt. Für diese Funktion f ist die erste Ableitung f' nicht konstant, sondern es gilt: $f'(x) = 2x$.

Höhere Ableitungen

Eine ableitbare Funktion f heißt

- ▶ *zweimal ableitbar*, falls die Ableitung f' von f wiederum ableitbar ist. Die Ableitung $(f')'$ von f nennt man *zweite Ableitung von f* und bezeichnet diese mit f'' oder $f^{(2)}$.
- ▶ *i -mal ableitbar* mit $i \in \mathbb{N}$, falls die $(i - 1)$ -te Ableitung $f^{(i-1)}$ von f existiert und ableitbar ist. Die Ableitung $(f^{(i-1)})'$ von f nennt man *i -te Ableitung von f* und bezeichnet diese mit $f^{(i)}$.
- ▶ *unendlich oft ableitbar*, falls f i -mal ableitbar ist für alle $i \in \mathbb{N}$.

Erste Ableitung einiger Polynome

- ▶ Der Wert der Steigung einer *konstanten Funktion* $f(x) = c$ ist stets 0.
Die erste Ableitung f' von f *verschwindet* somit für alle x :

$$f'(x) = 0.$$

- ▶ Der Wert der Steigung einer *linearen Funktion* $f(x) = cx + d$ ist stets c .
Die erste Ableitung f' von f ist somit für alle x *konstant*:

$$f'(x) = c.$$

- ▶ Der Wert der Steigung der *quadratischen Potenzfunktion* $f(x) = x^2$ ist $2x$.
Die erste Ableitung f' von f ist somit für alle x festgelegt durch

$$f'(x) = 2x.$$

- ▶ Der Wert der Steigung der *Potenzfunktion* $p_n(x) = x^n$ ist nx^{n-1} .
Die erste Ableitung f' von f ist somit für alle x festgelegt durch

$$p_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Erste Ableitung der Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$

Der Differentialquotient ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Der Wert der Steigung der *Exponentialfunktion* $\exp(x)$ ist also e^x .

Damit ist die erste Ableitung \exp' von \exp ist für alle x festgelegt durch:

$$\exp'(x) = e^x.$$

Erste Ableitung der Sinusfunktion $\sin(x)$ und Cosinusfunktion $\cos(x)$

Die erste Ableitung \sin' von \sin ist für alle x gegeben durch

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Die erste Ableitung \cos' von \cos ist für alle x gegeben durch

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

Dies kann man mit Hilfe des Differentialquotienten und der Additionstheoreme zeigen.

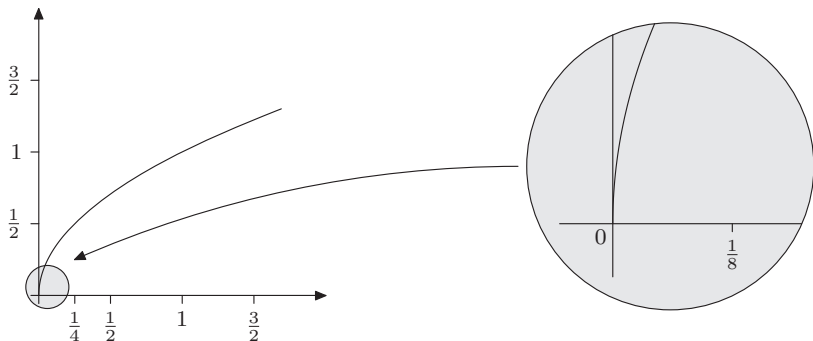


Abbildung: Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist wegen der Stelle $x = 0$ nicht ableitbar: Der Wert der Steigung von f wird unendlich groß, wenn man sich $x = 0$ von rechts kommend nähert. Ein Zoom auf $x = 0$ (rechts) illustriert, dass der Wert der Steigung über alle positiven Schranken hinauswächst.

Erste Ableitung der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [a, b]$ mit $a > 0$

Falls $a > 0$ ist, so ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ der Wert der Steigung der (*Quadrat*)- *Wurzelfunktion* $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in [a, b]$.

Die erste Ableitung f' von f ist dann für alle $x \in [a, b]$ festgelegt durch:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ähnlich verfährt man mit anderen Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten.

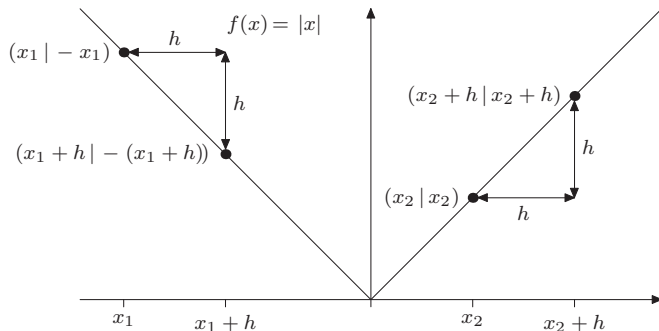


Abbildung: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist wegen der Stelle $x = 0$ nicht ableitbar: Der Graph von f hat dort einen "Knick".

Faktorregel und Summenregel

Ist f eine ableitbare Funktion und λ eine reelle Konstante, so ist das *Faktorprodukt* $\lambda \cdot f$ eine ableitbare Funktion und die erste Ableitung $(\lambda \cdot f)'$ von $\lambda \cdot f$ ist für alle x festgelegt durch:

$$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x).$$

Sind f und g ableitbare Funktionen, so ist deren *Summe* $f + g$ eine ableitbare Funktion und die erste Ableitung $(f + g)'$ von $f + g$ ist für alle x festgelegt durch:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Ableitungen von Polynomfunktionen p

- ▶ Jede Polynomfunktion p vom Grad n

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$$

ist ableitbar und die erste Ableitung p' von p ist das Polynom vom Grad $n - 1$, das für alle x wie folgt festgelegt ist:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + i a_i x^{i-1} + \dots + a_1.$$

- ▶ Jede Polynomfunktion p vom Grad n ist unendlich oft ableitbar.
- ▶ Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die i -te Ableitung $p^{(i)}$ von p ein Polynom vom Grad $n - i$.
- ▶ Für $i \geq n + 1$ verschwindet die i -te Ableitung $p^{(i)}$, d.h. $p^{(i)}(x) = 0$ für alle x .

Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

Sind f und g ableitbare Funktionen, so ist deren *Produkt* $f \cdot g$ eine ableitbare Funktion und die erste Ableitung $(f \cdot g)'$ von $f \cdot g$ ist für alle x festgelegt durch:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Sind f und g ableitbare Funktionen, so ist deren *Verkettung* $f \circ g$ eine ableitbare Funktion und die erste Ableitung $(f \circ g)'$ von $f \circ g$ ist für alle x festgelegt durch:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)).$$

Sind f und g ableitbare Funktionen, so ist deren *Quotient* f/g eine für alle x mit $g(x) \neq 0$ ableitbare Funktion und die erste Ableitung $(f/g)'$ von f/g ist für alle x festgelegt durch:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Ist f umkehrbar, so gilt $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Falls f differenzierbar ist liefert die Kettenregel

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = 1 = (f^{-1})'(f(x))f'(x)$$

beziehungsweise

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

gegeben zusätzlich $f'(x) \neq 0$.

Ableitung der Umkehrfunktion

Ist f ableitbar mit $f'(x) \neq 0$, dann ist auch f^{-1} ableitbar und es gilt

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Differential- und Integralrechnung

Ableitungen

Kurvendiskussion

Integration

Monotonie und Vorzeichen der ersten Ableitung

Eine ableitbare Funktion f ist genau dann monoton steigend, wenn die Ableitung f' von f für alle x nicht negativ ist:

$$f'(x) \geq 0.$$

Ist sogar $f'(x) > 0$ für alle x , so ist f streng monoton steigend.

Eine ableitbare Funktion f ist genau dann monoton fallend, wenn die Ableitung f' von f für alle x nicht positiv ist:

$$f'(x) \leq 0.$$

Ist sogar $f'(x) < 0$ für alle x , so ist f streng monoton fallend.

Globale Extrema

Eine Stelle x_0 heißt

- ▶ *globales Maximum* von f , falls für alle x der Wert $f(x)$ kleiner oder gleich dem Wert f von x_0 ist:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

- ▶ *globales Minimum* von f , falls für alle x der Wert $f(x)$ größer oder gleich dem Wert f von x_0 ist:

$$f(x) \geq f(x_0).$$

- ▶ *globales Extremum* von f , falls sie ein globales Maximum oder ein globales Minimum ist.

Ist f eine monotone Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ festgelegt ist, d.h. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so sind die Randstellen a und b globale Extrema von f .

Lokale Extrema

Eine Stelle x_0 heißt

- ▶ *lokales Maximum* von f , falls es ein umgebendes Intervall $(x_0 - c, x_0 + c)$ gibt, in dem $f(x) \leq f(x_0)$ gilt. Der Punkt $(x_0 | f(x_0))$ heißt dann *Hochpunkt des Graphen* von f .
- ▶ *lokales Minimum* von f , falls es ein umgebendes Intervall $(x_0 - c, x_0 + c)$ gibt, in dem $f(x) \geq f(x_0)$ gilt. Der Punkt $(x_0 | f(x_0))$ heißt dann *Tiefpunkt des Graphen* von f .
- ▶ *lokales Extremum* von f , falls sie ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist. Der Punkt $(x_0 | f(x_0))$ heißt dann *Extrempunkt des Graphen* von f .

Notwendiges Kriterium für lokale Extrema

Falls eine ableitbare Funktion f in x_0 ein lokales Extremum hat, so verschwindet dort die Ableitung von f , das heißt

$$f'(x_0) = 0.$$

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Ist f eine zweimal ableitbare Funktion und x_0 eine Stelle, sodass $f'(x_0) = 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, falls zudem $f''(x_0) \neq 0$ gilt.

- ▶ Gilt dann $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein lokales Maximum.
- ▶ Gilt dann $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 ein lokales Minimum.

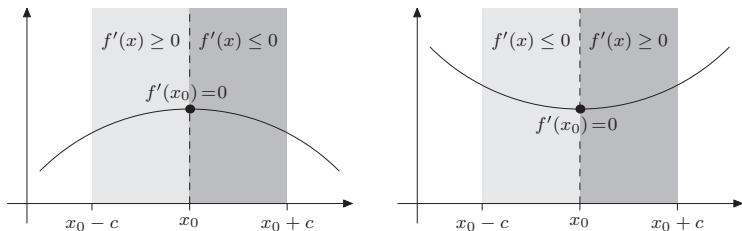


Abbildung: Ist x_0 ein lokales Extremum, so verschwindet dort die Ableitung: $f'(x_0) = 0$. Hat die erste Ableitung f' dort einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ (links), so handelt es sich um ein lokales Maximum von f . Liegt für diese dort ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ vor (rechts), so handelt es sich um ein lokales Minimum von f .

Wendestellen

Eine Stelle x_0 wird *Wendestelle von f* genannt, falls f' in x_0 ein lokales Extremum hat. Der Punkt $(x_0 | f(x_0))$ heißt dann *Wendepunkt des Graphen von f* .

Notwendiges Kriterium

Falls eine zweimal ableitbare Funktion f in x_0 eine Wendestelle hat, so verschwindet dort die zweite Ableitung von f , das heißt

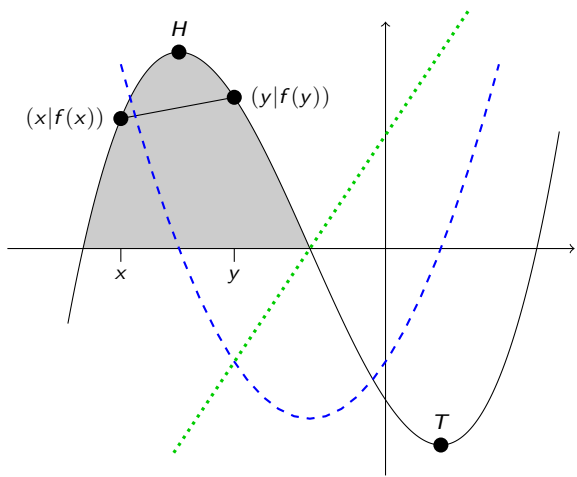
$$f''(x_0) = 0.$$

Hinreichendes Kriterium

Ist f eine dreimal ableitbare Funktion und x_0 eine Stelle, so dass $f''(x_0) = 0$, so besitzt f in x_0 eine Wendestelle, falls zudem gilt

$$f'''(x_0) \neq 0.$$

Der Graph einer zweimal ableitbaren Funktion ist genau dort konvex, wo die zweite Ableitung nicht-negativ ist, und konkav, wo die zweite Ableitung nicht-positiv ist.



Erläuterung des Bildes

Das Polynom $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ besitzt ein lokales Maximum in $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ und ein lokales Minimum in $x_1 = -1 + \sqrt{3}$. Die erste Ableitung $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ (blau gestrichelt) verschwindet dort, $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, und wechselt dort jeweils das Vorzeichen.

Im Bereich $x \leq -1$ ist der Graph dieser Funktion konkav, denn für die zweite Ableitung (grün gepunktete Gerade) gilt: $f''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \leq 0$. Im Bereich $x \geq -1$ ist dieser konvex, denn dort gilt: $f''(x) \geq 0$. In $x_0 = -1$ gelten $f''(-1) = 0$ und $f'''(-1) = 3/2$. Deshalb ist $x_0 = -1$ ein lokales Minimum von f' und somit eine Wendestelle von f . Am Wendepunkt $W = (-1|0)$ geht der Graph von f vom konkaven in den konvexen Bereich über.

Differential- und Integralrechnung

Ableitungen

Kurvendiskussion

Integration

Integration

- ▶ Wir versuchen nun die Fläche unterhalb eines Graphen zu bestimmen.
- ▶ Wir werden sehen, dass die Integration die Umkehrung zur Ableitung ist.
- ▶ Die dazu benötigte Mathematik geht im Wesentlichen auf zwei Mathematiker aus dem 17. Jahrhundert zurück: Gottfried Wilhelm Leibniz und Sir Isaac Newton.

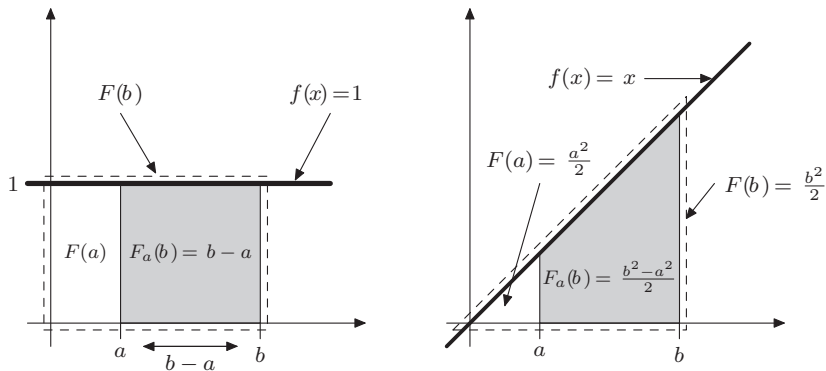


Abbildung: Berechnung bestimmter Integrale für $f(x) = 1$ (links) und $f(x) = x$ (rechts). Der Graph von f umschließt bei Durchlauf von $[a, b]$ mit der x -Achse die graue Fläche mit Inhalt $F_a(b)$. Dieser ist gerade die Differenz der Inhalte der umstrichelten und der weißen Fläche: $F(b) - F(a)$.

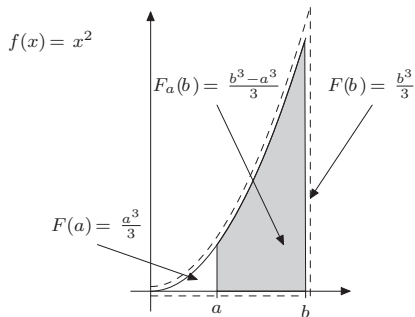
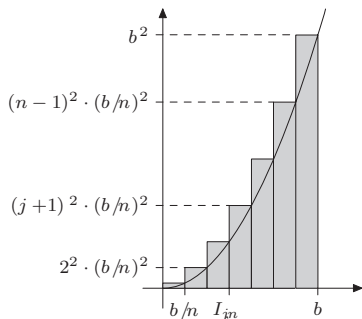


Abbildung: Näherung des Flächeninhalts $F(b)$ für $f(x) = x^2$ durch Verwendung einer stückweise konstanten Funktion (links). Der Graph von diesem f umschließt bei Durchlauf von $[a, b]$ mit der x -Achse die graue Fläche mit Inhalt $F_a(b) = F(b) - F(a)$. Dies ist wiederum die Differenz der Inhalte der umstrichelten und der weißen Fläche (rechts).

Integration der Potenzfunktion $p_N(x) = x^N$, wobei $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Das bestimmte Integral der Potenzfunktion $p_N(x) = x^N$ hinsichtlich $[a, b]$ ist gegeben durch

$$\int_a^b x^N dx = \frac{b^{N+1}}{N+1} - \frac{a^{N+1}}{N+1} = \frac{b^{N+1} - a^{N+1}}{N+1}.$$

Integrierbarkeit und bestimmtes Integral

Eine Funktion f heißt auf $[a, b]$ *integrierbar*, falls für jede Unterteilung von $[a, b]$ in n Teilintervalle $I_{j,n} = [x_{j,n}, x_{j+1,n}]$, deren Längen $x_{j+1,n} - x_{j,n}$ gegen 0 für $n \rightarrow \infty$ gehen, und für jede Wahl von Punkten $\tilde{x}_{j,n} \in I_{j,n}$, wobei $j \in \{0, \dots, n-1\}$, der Grenzwert der Folge

$$\mathcal{F}_n = f(\tilde{x}_{0,n})(x_{1,n} - x_{0,n}) + \dots + f(\tilde{x}_{j,n})(x_{j+1,n} - x_{j,n}) \\ + \dots + f(\tilde{x}_{n-1,n})(x_{n,n} - x_{n-1,n})$$

für $n \rightarrow \infty$ existiert und jeweils gleich ist.
In diesem Fall heißt der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(\tilde{x}_{j,n})(x_{j+1,n} - x_{j,n})$$

das *bestimmte Integral* von f hinsichtlich $[a, b]$.

Nomenklatur

Gegeben sei ein Integral $\int_a^b f(x)dx$. Dann heißen

- ▶ f *Integrand* (oder auch *Integrandenfunktion*),
- ▶ x die *Integrationsvariable* und
- ▶ a, b die *Integrationsgrenzen*.

Eigenschaften des bestimmten Integrals

- a) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (*Intervall-Additivität*)
- b) $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ (*Vertauschung der Integrationsgrenzen*)
- c) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (*Leeres Integral*)
- d) Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{Positivität.}$$

Flächeninhalt

Das bestimmte Integral gibt im Allgemeinen nicht den *absoluten Flächeninhalt* der vom Graphen von f mit der x -Achse umschlossenen Fläche an, sondern den *orientierten Flächeninhalt*.

Den absoluten Flächeninhalt erhält man mit

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

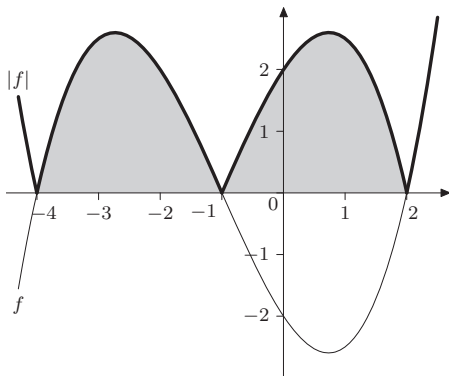


Abbildung: Das bestimmte Integral von f ergibt im Allgemeinen lediglich den orientierten Flächeninhalt. Um den absoluten Flächeninhalt (grau) zu bestimmen, muss man die Funktion $|f|$ (breite Kurve) integrieren: An allen Stellen, an denen $f(x)$ nicht positiv ist (im Bild: für $x \in [-1, 2]$), wird anstatt f die Funktion $-f$ integriert.

Faktorregel und Summenregel

Das bestimmte Integral des Faktorprodukts $\lambda \cdot f$ hinsichtlich $[a, b]$ ist das Produkt von λ mit dem bestimmten Integral von f hinsichtlich $[a, b]$:

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Das bestimmte Integral der Summe $f + g$ von Funktionen f und g hinsichtlich $[a, b]$ ist gleich der Summe der bestimmten Integrale von f und g hinsichtlich $[a, b]$:

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Stetige Funktionen

- ▶ Eine Funktion wird *stetig* genannt, wenn sie keine Sprünge aufweist, sie also “in einem Strich zeichenbar” ist.
- ▶ Diese Funktionen weisen also keine Polstellen, Sprünge oder Definitionslücken auf.
- ▶ Alle stetigen Funktionen sind integrierbar.

Ableitbarkeit der Integralfunktion stetiger Funktionen, Stammfunktion

Für jede stetige Funktion f auf $[a, b]$ ist

$$F_a(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad t \in [a, b]$$

eine ableitbare Funktion, deren erste Ableitung mit f übereinstimmt:

$$F'_a(t) = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Allgemein nennt man eine Funktion F mit $F' = f$ eine Stammfunktion von f .

Zwei Stammfunktionen F und G derselben Funktion f unterscheiden sich nur um eine additive Konstante c :

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{für alle } x.$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f , so lässt sich das bestimmte Integral von f hinsichtlich $[a, b]$ wie folgt berechnen:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Produktregel und Substitutionsregel

Sind f und g nur auf $[a, b]$ ableitbare Funktionen, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Das wird auch *partielle Integration* genannt.

Ist f stetig auf $[a, b]$ und g ableitbar auf $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b g'(x)f(g(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(\tilde{x})d\tilde{x}.$$

Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen höherer Ordnung

Wurzel- und Exponentialgleichungen

Ungleichungen

Gleichung

Eine Gleichung besteht aus zwei mathematischen Ausdrücken (Termen), die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

Enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so sucht man nach der *Lösung der Gleichung*. Die Menge aller Lösungen, die auch leer sein kann, bezeichnet man als *Lösungsmenge* der Gleichung.

Hinweis

Fast alle Lösungsverfahren für Gleichungen beruhen darauf, dass es erlaubt ist, Gleichungen nach gewissen Regeln umzuformen, ohne ihre Lösungsmenge zu ändern.

Die folgenden Umformungen einer Gleichung ändern nicht deren Lösungsmenge und werden *erlaubte Umformungen* genannt:

- ▶ Addition bzw. Subtraktion derselben Zahl auf beiden Seiten der Gleichung
- ▶ Multiplikation beider Seiten mit derselben von null verschiedenen Zahl

Lösung linearer Gleichung

Eine Gleichung der Form

$$ax + b = 0$$

mit $a \neq 0$ nennt man *lineare Gleichung in Normalform*. Eine solche Gleichung hat genau die Lösung

$$x = -\frac{b}{a}$$

Probe

Wir überprüfen, dass $-\frac{b}{a}$ tatsächlich eine Lösung ist:

$$a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$$

Lineare Gleichung in Normalform?

Nicht jede lineare Gleichung ist in Normalform gegeben:

$$2x - 3(5 - x) = 3(2x - 5) + 9.$$

Dies hat die Lösung $x = -9$.

Oft ist noch nicht einmal auf den ersten Blick klar, dass eine lineare Gleichung vorliegt:

$$(x - 1)^2 + (x + 1)(x - 3) = 2(x - 2)^2.$$

Diese Gleichung hat die Lösung $x = \frac{5}{2}$.

Scheinlösungen

Für die Gleichung

$$\frac{2(x+1)}{x-2} = \frac{2(2-x)}{1-x}$$

ergibt sich mit den Umformungen die Lösung $x = \frac{5}{4}$.
Dabei multipliziert man die Gleichung mit $(x-2)(1-x)$.

Scheinlösungen

Hier können *Scheinlösungen* auftreten. Die Probe ist deshalb unerlässlich!

Im obigen Fall ist $x = \frac{5}{4}$ tatsächlich eine Lösung.

Bei der folgenden Gleichung ist das eben Beschriebene ein Problem:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x \Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - x$$

Die Scheinlösung $x = 1$ ist keine Lösung, die Gleichung ist also nicht lösbar.



Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen höherer Ordnung

Wurzel- und Exponentialgleichungen

Ungleichungen

Quadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nennt man *quadratische Gleichung*.

Eine Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

nennt man *quadratische Gleichung in Normalform*.

Durch Division durch $a \neq 0$ kann eine quadratische Gleichung in Normalform gebracht werden:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Ist $a = 0$, so ist dies nicht notwendig, da wir somit eine lineare Gleichung haben.

Im Folgenden werden wir uns auf quadratische Gleichungen in Normalform beschränken.

Lösen quadratischer Gleichungen

Um eine quadratische Gleichung in Normalform zu lösen verwendet man die *p-q-Formel* und berechnet die beiden Zahlen

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

und

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

- ▶ Ist der Radikand (=Ausdruck unter der Wurzel) negativ, so hat die Gleichung keine Lösung.
- ▶ Ist er null, so gibt es nur die Lösung $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.
- ▶ Ist er positiv, so ist auch die Wurzel positiv und x_1 und x_2 sind die beiden Lösungen.

Zerlegung von Polynomen zweiten Grades in Linearfaktoren

- ▶ Das Lösen quadratischer Gleichungen ist identisch zur Nullstellenbestimmung von Polynomen zweiten Grades.
- ▶ Die mögliche Anzahl von Lösungen ist somit die mögliche Anzahl von Nullstellen eines solchen Polynoms.
- ▶ Kennt man die Nullstellen eines Polynoms, so kann man es *Faktorisieren* bzw. *in Linearfaktoren zerlegen*.

Zerlegung in Linearfaktoren

Hat ein Polynom zweiten Grades $p(x) = ax^2 + bx + c$ zwei reelle Nullstellen x_1 und x_2 , so hat es die Darstellung

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dies gilt auch, wenn diese beiden Nullstellen identisch sind, das heißt $x_1 = x_2$ und also der Radikand in der p - q -Formel null ist.

Durch Zerlegung können rationale Funktionen vereinfacht werden.

Sensation: $2 = 1!$?

$$-2 = -2$$

$$4 - 6 = 1 - 3$$

$$4 - 6 + \frac{9}{4} = 1 - 3 + \frac{9}{4}$$

$$\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}$$

$$2 = 1$$

Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen höherer Ordnung

Wurzel- und Exponentialgleichungen

Ungleichungen

Nullstellen allgemeiner Polynomgleichungen

Im Allgemeinen ist eine *Polynomgleichung der Ordnung n* gegeben durch

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Nullstellenberechnung

Für Grad drei und vier gibt es noch sehr komplizierte Lösungsformeln für die Nullstellenberechnung (*cardanische Formeln* oder *Formeln von Cardano*), ab Grad fünf existieren erwiesenermaßen gar keine mehr.

Nullstellen erraten

Bei einfachen Polynomen dritten Grades oder mehr lässt sich häufig eine Nullstelle erraten:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

Es ist leicht erkennbar, dass eine Nullstelle bei $x = 2$ liegt. Durch Abspaltung des Linearfaktors $(x - 2)$ ergibt sich

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1).$$

Da $x^2 + 1$ nicht null werden kann, ist $x = 2$ die einzige Lösung.

Polynomgleichungen ohne Absolutglied

Enthält eine Polynomgleichung kein Absolutglied, d.h. $a_0 = 0$, so ist stets $x = 0$ eine Lösung dieser Gleichung.

Beispiel

Die Gleichung

$$x^3 - 9x = 0$$

hat $x = 0$ als Lösung. Durch Ausklammern ergibt sich

$$x(x^2 - 9) = 0.$$

Der verbleibende Faktor $x^2 - 9$ führt nun zu

$$x^2 - 9 = 0,$$

was die Nullstellen $x = -3$ und $x = 3$ besitzt.

Biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

heißt *biquadratische Gleichung*.

Um die Lösung einer biquadratischen Gleichung zu bestimmen, führt man die Substitution $u = x^2$ durch und berechnet die Lösungen u_1 und u_2 der quadratischen Gleichung

$$au^2 + bu + c = 0$$

in gewohnter Weise.

Sind u_1 bzw. u_2 nicht negativ, so berechnet man

$$x_{11} = \sqrt{u_1}, \quad x_{12} = -\sqrt{u_1} \quad \text{bzw.} \quad x_{21} = \sqrt{u_2}, \quad x_{22} = -\sqrt{u_2}$$

Die so berechneten Zahlen $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ sind dann Lösungen der biquadratischen Gleichung.

Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen höherer Ordnung

Wurzel- und Exponentialgleichungen

Ungleichungen

Wurzelgleichung

Eine Gleichung, bei der die Variable unter einer Wurzel steht, heißt *Wurzelgleichung*.

Scheinlösungen

Auch bei Wurzelgleichungen kann es zu *Scheinlösungen* kommen.

Um eine Wurzelgleichung zu lösen, quadriert bzw. potenziert man sie – eventuell mehrfach –, um sie in eine Polynomgleichung umzuformen.

Dann löst man – falls möglich – die entstandene Polynomgleichung und setzt anschließend zum Ausschluss von Scheinlösungen die Lösung der Polynomgleichung in die Ausgangsgleichung (Wurzelgleichung) ein.

Exponentialgleichung

Eine Gleichung, bei der die Variable im Exponent auftritt, heißt *Exponentialgleichung*.

Allgemeine Lösung

Um eine Gleichung der Art

$$a^x = b$$

mit a und b positive reelle Zahlen und $a \neq 1$ zu lösen, kann diese Gleichung umgeformt werden:

$$x = \log_a(b)$$

Gleiche Basis

In bestimmten Fällen kann die Lösung direkt abgelesen werden:

$$17^{x+1} = 17^5 \Leftrightarrow x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$$

Wenn mehrere Summanden vorkommen kann umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 135 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x = 135 \\ \Leftrightarrow & 5 \cdot 3^x = 135 \\ \Leftrightarrow & 3^x = 27 \\ \Leftrightarrow & x = 3 \end{aligned}$$

Das allgemeine Prinzip hier ist es, den kleinsten Summanden mit x im Exponenten (hier 3^x) zu suchen und die anderen durch Zerlegung mit Hilfe der Potenzregeln in dieselbe Form zu bringen.

Unterschiedliche Basen

Wenn x im Exponenten in unterschiedlichen Basen auftritt muss der Logarithmus angewandt werden:

$$\begin{aligned} & 2^{x-1} = 3^{x+1} \\ \Leftrightarrow & (x-1) \cdot \log(2) = (x+1) \log(3) \\ \Leftrightarrow & x(\log(2) - \log(3)) = (\log(2) + \log(3)) \\ \Leftrightarrow & x = \frac{\log(2) + \log(3)}{\log(2) - \log(3)} = \frac{\log(6)}{\log(\frac{2}{3})} = -4,419 \end{aligned}$$

Hier wurden die Logarithmenregeln $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$ sowie $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$ angewandt.

Basis egal

Welcher Logarithmus verwendet wird, spielt keine Rolle.

Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen höherer Ordnung

Wurzel- und Exponentialgleichungen

Ungleichungen

Ungleichung

- ▶ Ungleichungen heißen so, weil sie *ungleich schwerer* zu behandeln sind als Gleichungen.
- ▶ Statt mit einem Gleichheitszeichen sind die Terme hier mit einem *Ungleichheitszeichen* $<$ oder $>$ verbunden. Alternativ können auch die Zeichen \leq und \geq verwendet werden, die Gleichheit zulassen.
- ▶ Enthält mindestens einer der Terme eine Variable, so sucht man nach der *Lösung der Ungleichung*.
- ▶ Dies sind Zahlen, die, wenn man sie anstelle der Variablen einsetzt, bewirken, dass die Werte der beiden durch das Ungleichheitszeichen verbundenen Terme gemäß diesem in Relation stehen.
- ▶ Die Menge der Lösungen, die auch leer sein kann, bezeichnet man als *Lösungsmenge* der Ungleichung und symbolisiert sie mit \mathbb{L} .

Umformung von Ungleichungen

Die folgenden Umformungen einer Ungleichung ändern nicht deren Lösungsmenge und werden *erlaubte Umformungen* genannt:

- ▶ Addition bzw. Subtraktion derselben Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung
- ▶ Multiplikation beider Seiten mit derselben *positiven* Zahl

Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl

Die Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit derselben negativen Zahl ändert ihre Lösungsmenge dann nicht, wenn man gleichzeitig das Ungleichheitszeichen, das beide Seiten verbindet, umkehrt.

Beispiel

Wir versuchen diese Ungleichung zu lösen:

$$\frac{x-1}{2x+1} < 1$$

Um mit dem Nenner multiplizieren können, müssen wir uns überlegen, ob dieser positiv oder negativ ist. Da wir dies zunächst nicht beantworten können, müssen wir zwei Fälle untersuchen:

1. Fall: $2x + 1 > 0$, also $x > -\frac{1}{2}$:

$$x - 1 < 2x + 1 \Leftrightarrow x > -2$$

Hier ist die erste Grenze $x > -\frac{1}{2}$ schärfer.

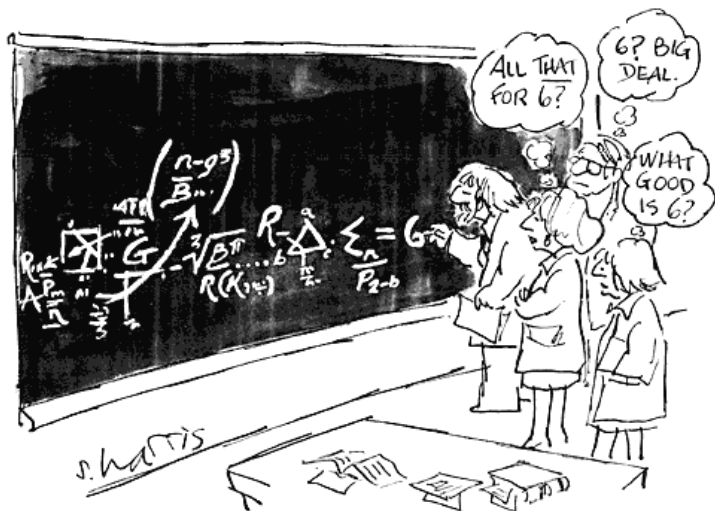
2. Fall: $2x + 1 < 0$, also $x < -\frac{1}{2}$:

$$x - 1 > 2x + 1 \Leftrightarrow x < -2$$

Hier ist die berechnete Grenze $x < -2$ schärfer.

Es ergibt sich also

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ oder } x > -\frac{1}{2} \right\}$$



Lineare Algebra

Vektoren

Lineare Gleichungssysteme

Analytische Geometrie

Vektor

Unter einem dreidimensionalen Vektor versteht man eine Größe der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

wobei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Menge aller dreidimensionalen Vektoren wird mit \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Allgemein versteht man unter einem n -dimensionalen Vektor eine Größe der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

wobei $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Menge aller n -dimensionalen Vektoren wird mit \mathbb{R}^n bezeichnet.

Addition und Subtraktion von Vektoren, Multiplikation mit einer Zahl

Sind \mathbf{x} und \mathbf{y} zwei n -dimensionale Vektoren, dann definiert man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}.$$

Man addiert oder subtrahiert also zwei Vektoren gleicher Dimension, indem man die jeweiligen Komponenten der Vektoren, also ihre Einträge, addiert oder subtrahiert.

Für eine reelle Zahl λ und einen Vektor \mathbf{x} definiert man

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

Sind \mathbf{x} und \mathbf{y} zwei n -dimensionale Vektoren, dann definiert man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n.$$

Man bezeichnet diese Operation als das *Skalarprodukt* der beiden Vektoren.

Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Regeln

- ▶ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- ▶ $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$
- ▶ $\lambda \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$

Linearkombination und lineare (Un-)Abhängigkeit

Sind $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, dann heißt:

$$c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_m \cdot \mathbf{x}_m$$

eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$.

Die Vektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear abhängig*, falls man einen von ihnen als Linearkombination der restlichen $m - 1$ Vektoren darstellen kann.

Vektoren, die nicht linear abhängig sind, heißen *linear unabhängig*.

Lineare Algebra

Vektoren

Lineare Gleichungssysteme

Analytische Geometrie

Lösen von Gleichungssystemen

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems wird durch die folgenden Operationen nicht verändert:

- ▶ Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl
- ▶ Addieren eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen
- ▶ Vertauschen zweier Gleichungen

Lineare Gleichungssysteme können genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

Die Lösungen kann man mit dem Gauß-Algorithmus bestimmen. Dies wird ausführlich in der Vorlesung besprochen.

$$\begin{array}{l} \text{No Study} = \text{Fail} \\ +) \quad \underline{\text{Study} = \text{No Fail}} \\ \text{No Study} + \text{Study} \\ \quad = \text{Fail} + \text{No Fail} \\ \rightarrow (\cancel{\text{No}}+1) \text{ Study} = (\cancel{\text{No}}+1) \text{ Fail} \\ \therefore \text{Study} = \text{Fail} \end{array}$$

Lineare Algebra

Vektoren

Lineare Gleichungssysteme

Analytische Geometrie

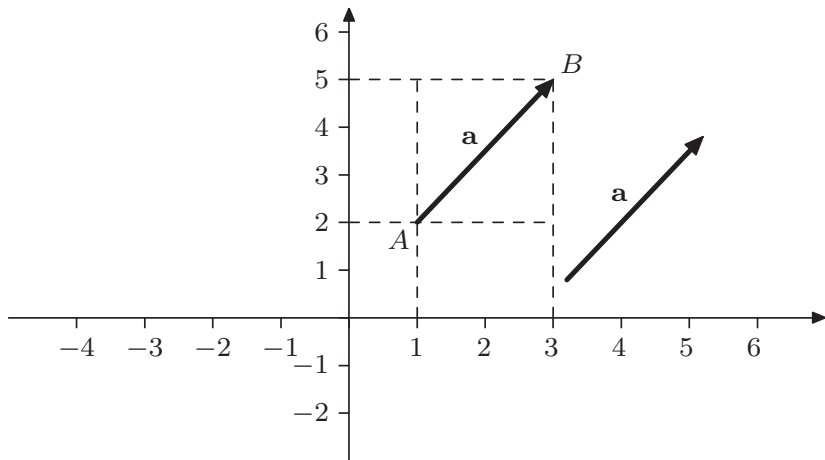


Abbildung: Vektor in der Ebene

Zweidimensionale Vektoren

Ein zweidimensionaler Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

kann in ein zweidimensionales Koordinatensystem eingezeichnet werden, indem man sich von einem beliebigen Startpunkt aus um a_1 Schritte in die waagerechte Richtung bewegt und um a_2 Schritte in die senkrechte Richtung. Der Vektor ist dann eine gerichtete Strecke vom gewählten Anfangspunkt bis zum erreichten Endpunkt.

Sind umgekehrt zwei Punkte mit den Koordinaten $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ gegeben, so wird der *Verbindungsvektor* \overrightarrow{AB} zwischen den beiden Punkten berechnet durch

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Dreidimensionale Vektoren

Ein dreidimensionaler Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

kann in ein dreidimensionales Koordinatensystem eingezeichnet werden, indem man sich von einem beliebigen Startpunkt aus um a_1 Schritte in die erste Richtung bewegt, um a_2 Schritte in die zweite Richtung und um a_3 Schritte in die dritte Richtung. Der Vektor ist dann eine gerichtete Strecke vom gewählten Anfangspunkt bis zum erreichten Endpunkt.

Sind umgekehrt zwei Punkte mit den Koordinaten $A = (x_A, y_A, z_A)$ und $B = (x_B, y_B, z_B)$ gegeben, so wird der *Verbindungsvektor* \overrightarrow{AB} zwischen den beiden Punkten berechnet durch

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Addition von Vektoren, Multiplikation mit einer Zahl

Gegeben seien zwei zwei- oder dreidimensionale Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} .

Zeichnet man \mathbf{a} und \mathbf{b} so in ein Koordinatensystem ein, dass der Anfangspunkt von \mathbf{b} mit dem Endpunkt von \mathbf{a} übereinstimmt, dann ist $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ der Vektor, der vom Anfangspunkt des Vektors \mathbf{a} zum Endpunkt des Vektors \mathbf{b} zeigt.

Ist \mathbf{a} ein zwei- oder dreidimensionaler Vektor und λ eine positive Zahl, dann ist $\lambda \cdot \mathbf{a}$ der Vektor, der in die gleiche Richtung wie \mathbf{a} zeigt, aber mit dem Faktor λ gestreckt ist. Ist λ eine negative reelle Zahl, dann ist $\lambda \cdot \mathbf{a}$ der Vektor, der in die entgegengesetzte Richtung wie \mathbf{a} zeigt und mit dem Faktor $|\lambda|$ gestreckt ist.

Insbesondere ist $-\mathbf{a}$ der Vektor gleicher Länge, der genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Ist also \mathbf{a} der Vektor zwischen A und B , dann ist $-\mathbf{a}$ der Vektor zwischen B und A .

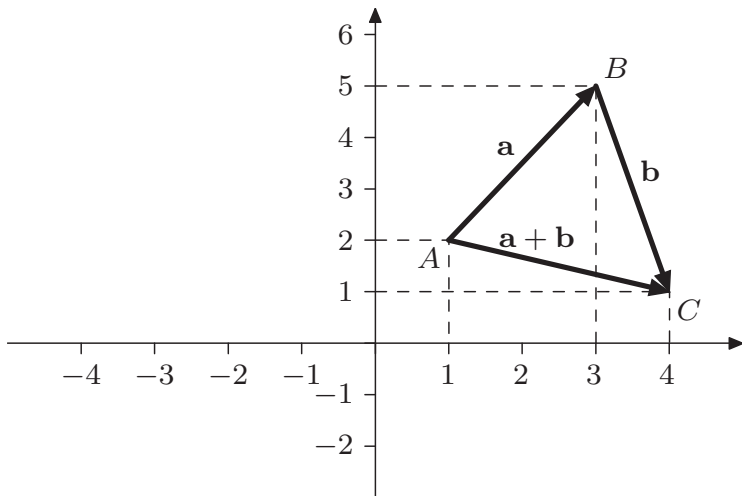


Abbildung: Addition von Vektoren

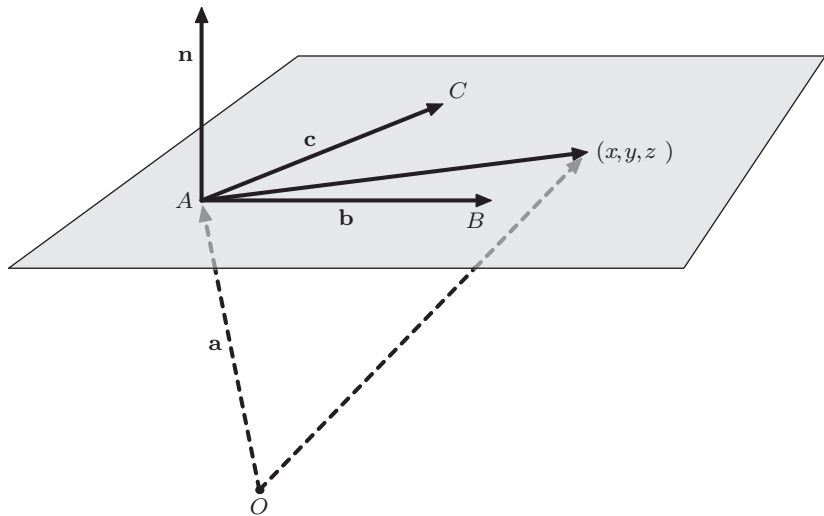


Abbildung: Ebene im Raum

Ebenengleichung

Seien A , B und C drei Punkte im Raum, die nicht auf einer Geraden liegen. Wir wählen die Bezeichnungen $\vec{0A} = \mathbf{a}$, $\vec{AB} = \mathbf{b}$, $\vec{AC} = \mathbf{c}$.

Die Ebene im Raum, die von den drei Punkten A , B und C (beziehungsweise den Geraden durch den Punkt A mit Richtung \mathbf{b} und \mathbf{c}) aufgespannt wird, ist definiert durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}, \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dies ist die *parametrisierte Form* der Ebenengleichung.

Senkrecht stehender Vektor

Genau dann stehen zwei zwei- oder dreidimensionale Vektoren **a** und **b** senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt, das heißt, wenn

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

gilt.

Ein Vektor, steht genau dann senkrecht auf den Vektoren **a** und **b** steht, wenn er auf der von ihnen aufgespannten Ebene senkrecht steht.

Solch ein Vektor heißt auch *Normalenvektor* der Ebene.

Vektorprodukt

Sind $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ zwei dreidimensionale Vektoren, so nennt man den Vektor

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

das *Vektorprodukt* oder auch *Kreuzprodukt* von \mathbf{b} und \mathbf{c} .

Der Vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ steht senkrecht auf \mathbf{b} und \mathbf{c} .

Die parameterfreie Ebenengleichung

Für einen beliebigen Ebenenpunkt P mit den Koordinaten (x, y, z) liegt der Vektor \overrightarrow{AP} in der Ebene.

Der Normalenvektor \mathbf{n} der Ebene steht damit senkrecht auf \overrightarrow{AP} .

Daraus kann man eine Gleichung berechnen, die von allen Ebenenpunkten erfüllt sein muss, und die keinen Parameter beinhaltet.

Berechnung der parameterfreien Ebenengleichung

Sind $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ drei Raumpunkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen, so berechnet man die parameterfreie Gleichung der Ebene, die durch alle drei Punkte geht, nach dem folgenden Schema:

- ▶ Man bestimmt

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

- ▶ Man berechnet mit dem Kreuzprodukt den Normalenvektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Man berechnet das Skalarprodukt

$$\mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

und vereinfacht die entstandene Gleichung, bis eine Gleichung der Form $ax + by + cz = d$ entsteht.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kombinatorik

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Versuch mit endlich vielen gleich wahrscheinlichen Ausgängen

Hat ein Versuch n verschiedene Ausgänge, die alle gleich wahrscheinlich sind, so tritt jeder Ausgang mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ ein.

Urnenmodelle

Unter einem *Urnenmodell* versteht man folgendes Gedankenexperiment: In einem Gefäß (der Urne) seien n unterscheidbare Kugeln enthalten, von denen nach und nach k Stück zufällig ausgewählt werden.

Man fragt nun nach der Anzahl der Möglichkeiten, die diese Auswahl hervorbringen kann, wobei man noch folgende Auswahlregeln unterscheidet:

- ▶ Auswahl mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge
- ▶ Auswahl mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge
- ▶ Auswahl ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge
- ▶ Auswahl ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Auswahl mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Zur Auswahl von k Kugeln aus einer Menge von n Kugeln mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge gibt es

$$n^k$$

Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte Auswahl zu treffen, ist also

$$\frac{1}{n^k}.$$

Binomialkoeffizient

Sind m und l zwei natürliche Zahlen mit $l \leq m$, so ist der Binomialkoeffizient

$$\binom{m}{l},$$

gesprochen “ m über l ”, definiert als

$$\binom{m}{l} = \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!}.$$

Auswahl mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Zur Auswahl von k Kugeln aus einer Menge von n Kugeln mit Zurücklegen, aber ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte Auswahl zu treffen, ist also

$$\frac{1}{\binom{n+k-1}{k}}.$$

Auswahl ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

Zur Auswahl von k Kugeln aus einer Menge von n Kugeln ohne Zurücklegen, aber mit Beachtung der Reihenfolge gibt es

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte Auswahl zu treffen, ist der Kehrwert hiervon, also

$$\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Anordnung einer Menge

Es gibt $n!$ Möglichkeiten, um n unterscheidbare Elemente einer Menge anzuordnen.

Auswahl ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Zur Auswahl von k Kugeln aus einer Menge von n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte Auswahl zu treffen, ist also

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k!(n-k)!}{n!}.$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kombinatorik

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Zufallsversuch und zufälliges Ereignis

Ein *zufälliges Ereignis*, meist kurz als *Ereignis* bezeichnet, ist das Ergebnis eines Zufallsversuchs.

Ein *Zufallsversuch* wiederum ist ein (zumindest theoretisch) beliebig oft wiederholbarer Versuch, dessen Ausgang nicht vorhersehbar ist.

Absolute und relative Häufigkeit

Ein Zufallsversuch werde n -mal wiederholt und hierbei trete das zufällige Ereignis A genau a -mal auf. Dann nennt man die Zahl

$$H_n(A) = a$$

die *absolute Häufigkeit* des Ereignisses A und die Zahl

$$h_n(A) = \frac{a}{n}$$

die *relative Häufigkeit* des Ereignisses A .

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsversuch habe N verschiedene gleich wahrscheinliche Ausgänge, in genau k davon trete das Ereignis A ein. Dann nennt man die Zahl

$$p(A) = \frac{k}{N}$$

die (*klassisch definierte*) *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A .

Manchmal sagt man auch k sei die *Anzahl der für A günstigen Fälle*.

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A und des Gegenereignisses \bar{A} hängen wie folgt zusammen:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

Unvereinbare Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B heißen *unvereinbar*, wenn sie niemals gleichzeitig eintreten, wenn also das Eintreten von B unmöglich ist, falls A eintritt, und umgekehrt.

Summe von Ereignissen

Sind A und B zwei Ereignisse, so kann man ein neues Ereignis $A \cup B$ definieren, das man als *Summe von A und B* bezeichnet.

Dieses Ereignis tritt ein, wenn mindestens eines der beiden Ereignisse A oder B eintritt.

Summe unvereinbarer Ereignisse

Sind A und B unvereinbare Ereignisse, so kann man die Wahrscheinlichkeit ihrer Summe wie folgt berechnen:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$



Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kombinatorik

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Auf der Menge der Ereignisse, die als Ergebnis eines Zufallsversuchs entstehen können, definiere man eine Funktion p , die jedem Ereignis eine reelle Zahl zuordnet. Diese Funktion bzw. ihre Werte bezeichnet man als (*axiomatisch definierte*) *Wahrscheinlichkeit*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (1) Für jedes Ereignis A gilt $0 \leq p(A) \leq 1$, die Funktion p nimmt also nur Werte zwischen 0 und 1 an.
- (2) Das so genannte *sichere Ereignis*, das alle möglichen Ereignisse in sich vereinigt und das man traditionell mit Ω bezeichnet, hat den Wert 1: $p(\Omega) = 1$.
- (3) Für jedes Paar unvereinbarer Ereignisse A und B gilt

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

- (4) Eigenschaft (3) gilt ebenfalls für die Summe beliebig (eventuell unendlich) vieler paarweise unvereinbarer Ereignisse.

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Neben den eben genannten Axiomen gelten für Wahrscheinlichkeiten folgende Regeln:

- (5) Das unmögliche Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit null:

$$p(\emptyset) = 0$$

- (6) Ist \bar{A} das Gegenereignis zu A , so gilt $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

- (7) Ist ein Ereignis A Teil eines anderen Ereignisses B , impliziert also das Eintreten von A auf alle Fälle das von B , so gilt $p(A) \leq p(B)$.

Produkte von Ereignissen

Sind A und B zwei Ereignisse, so kann man ein neues Ereignis $A \cap B$ definieren, das man als *Produkt von A und B* bezeichnet. Dieses Ereignis tritt ein, wenn sowohl A als auch B eintritt.

Summe beliebiger Ereignisse

Für beliebige (also nicht unbedingt unvereinbare) Ereignisse A und B gilt

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien A und B zwei Ereignisse desselben Zufallsversuchs und das Ereignis B habe nicht die Wahrscheinlichkeit null: $p(B) > 0$.

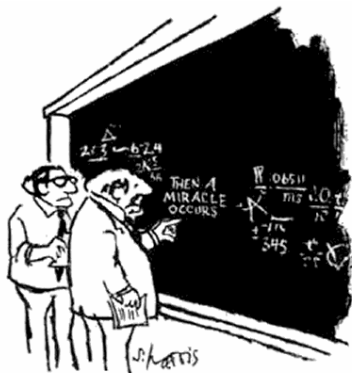
Dann heißt $p(A|B)$, definiert durch

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

die *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B* oder kurz die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A bzgl. B* .

Vielen Dank ...

- ▶ ... an Antje Kiesel, auf deren Vorkurs dieser beruht.
- ▶ ... an Maximilian Kirchner, auf dessen Skript dieses beruht.
- ▶ ... an Jip Veldmann für die Organisation.
- ▶ ... und an Sie für die Aufmerksamkeit.



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT
HERE IN STEP TWO."

© 1988 UNIVERSAL UPGRADE

Distributed by Color-Expressions Ltd.