

---

## Analysis I

Übungsblatt Nr.5

Abgabe vor der Vorlesung am 18.11.2013

---

### Aufgabe 17 (Komplexe Zahlen)

Bei dieser Aufgabe geht es darum den Umgang mit den komplexen Zahlen zu üben.

- a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{1}{2} + 2i\right) + \left(3 - \frac{1}{2}i\right), \quad \frac{1 + 2i}{2 + 3i}, \quad \frac{i}{1 + i} + \frac{2 + i}{1 - i}, \quad (2 + 2i)^3, \quad \left(\frac{2 + 3i}{1 - 2i} + \frac{i}{3 + i}\right)^{-1}.$$

- b) Sei  $z_n = (1+i)^n + (1-i)^n$ . Zeigen Sie die Existenz reeller Zahlen  $\lambda$  und  $a_0, a_1, a_2, a_3$  mit  $z_{4n+k} = \lambda^n a_k$ , für  $n \in \mathbb{Z}$  und  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Geben Sie diese Zahlen an.

Tipp: Berechnen Sie  $(1+i)^n$  für kleine  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aufgabe 18 (Polarkoordinaten)

Bei dieser Aufgabe geht es darum mit Hilfe der komplexen Multiplikation die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen herzuleiten. Wir definieren einen Winkel als bestimmt durch zwei im gleichen Punkt beginnende Strahlen  $g_1, g_2$ . Wir nennen zwei Winkel gleich, falls es eine orientierungserhaltende Kongruenzabbildung gibt, die den einen Winkel (d.h. die jeweiligen Strahlen, die den Winkel bestimmen) in den anderen Winkel abbilden.

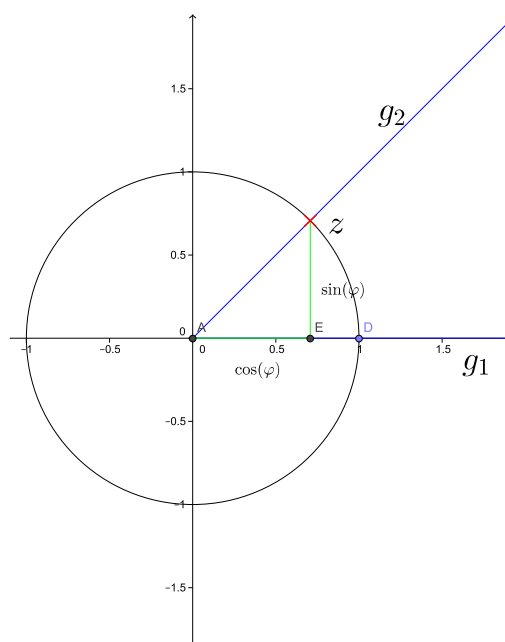
Nun identifizieren wir einen Winkel mit einer komplexen Zahl  $z$  mit Betrag 1 (vgl. Skizze): Dazu bilden wir den gegebenen Winkel durch eine orientierungserhaltende Kongruenzabbildung so ab, dass der Strahl  $g_1$  auf die positive  $x$ -Achse überführt wird. Der Schnittpunkt des zweiten Strahls  $g_2$  mit dem Einheitskreis bestimmt auf eindeutige Weise eine komplexe Zahl  $z$ . Ferner definieren wir dann die trigonometrischen Funktionen als

$$\sin(\varphi) = \operatorname{Im}(z), \quad \cos(\varphi) = \operatorname{Re}(z).$$

- a) Nutzen Sie die Multiplikation komplexer Zahlen, um die folgenden Additionstheoreme herzuleiten:

$$\begin{aligned}\sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2), \\ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2).\end{aligned}$$

- b) Finden Sie einen elementargeometrischen Beweis der oben angegebenen Additionstheoreme.
- c) Wir betrachten die Abbildung  $z \mapsto z^2$  als Abbildung der komplexen Zahlen in sich selbst. Bestimmen Sie das Bild der durch  $\{z \in \mathbb{C} \mid \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$  gegebenen Strahlen sowie das Bild des Halbkreises  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ .
- d) Beschreiben Sie geometrisch die Anordnung der Lösungen von  $z^2 = -1$ ,  $z^4 = -1$ ,  $z^4 = 1$  in der komplexen Ebene.



### Aufgabe 19 (Folgen I)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Folgen konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes. Skizzieren Sie außerdem die Folgen.

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+n+1}, \quad b_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \quad c_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right), \quad d_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}.$$

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

### Aufgabe 20 (Folgen II)

Sei  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine konvergente Folge mit Limes  $a$ . Sei  $c_n := \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ . Zeigen Sie, dass die Folge  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

Tipp: Teilen Sie die neue Folge  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in Abhängigkeit von dem erlaubten Fehler  $\epsilon$  so auf, dass nur für endlich viele Summanden große Abweichungen zum Grenzwert vorliegen und die restlichen Folgenglieder höchstens um  $\frac{\epsilon}{2}$  von dem Limes  $a$  entfernt sind.

**Hinweis:** Begründen Sie bei allen Aufgaben alle Ihre Behauptungen sorgfältig!