



Mathematisches Institut

Analysis in mehreren Veränderlichen

Skript zur gleichnamigen Vorlesung von Professor Herbert
Koch im Wintersemester 2012/2013

Herbert Koch

Stand vom 21. März 2013.

Die Vorlesung behandelt die Analysis in mehreren Veränderlichen. Im Zentrum stehen Abbildungen von Teilmengen des R^n in den R^m , die totale Ableitung derartiger Funktionen, Integrale und Volumina, und Differentialgleichungen. Sie wird speziell für Studenten des Lehramts angeboten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Normierte Vektorräume	8
3	Stetige Funktionen	11
3.1	Eine Anwendung auf Differentialgleichungen: Picarditeration	14
4	Topologische Begriffe	16
5	Wege, Zusammenhang und Weglänge	20
5.1	Weglänge und differenzierbare Wege	20
5.2	Wegintegrale	24
6	Die totale Ableitung	31
7	Stammfunktionen und Gradientenvektorfelder	36
8	Lokale Extrema	41
8.1	Minimale Abstände	45
8.2	Kurven, Flächen und Untermannigfaltigkeiten	46
9	Der Satz über inverse Funktionen	49
10	Der Jordan'sche Kurvensatz.	56
11	Differentialgleichungen	57
11.1	Wachstumsprozesse	57
12	Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung	60
13	Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	65
14	Der Satz von Picard-Lindelöf	67
15	Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	70
16	Das Eulersche Polygonzugverfahren	73
16.1	Die Verhulstgleichung (Pierre Francois Verhulst 1844, Populationsdynamik) . . .	74
16.2	Blow-up für $\dot{x} = x^2$	75
16.3	Michaelis-Menten-Kinetik	78
16.4	Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra	78
16.5	Die Uedagleichung	84
16.6	Das Lorentzsystem	88

17	Eigenschaften von Maß und Volumen	89
17.1	Hintergrund zu Existenz und Eindeutigkeit von Volumenbegriffen	91
17.2	Integral als Volumenbilanz	92
17.3	Axiome des Lebesguemaßes	96
18	Das Integral im \mathbb{R}^n	96
18.1	Beispiele	98
19	Das Lebesguemaß	103
19.1	Einschub: Die Cantormenge	103
19.2	Das Lebesguemaß	105
19.3	Die Brunn-Minkowskiungleichung	112
20	Das Lebesgueintegral	115
20.1	Die Definition für nichtnegative Funktionen	115

1 Einleitung

Inhalt dieser Vorlesung ist die Analysis in mehreren Veränderlichen. Sie baut auf der Analysis 1, dem Modul Elemente der Mathematik, und der linearen Algebra auf. Die Objekte der Vorlesung sind der \mathbb{R}^n , Teilmengen davon, und Abbildungen von Teilmengen des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m . Diese Themen werden in der Schule kaum explizit angesprochen. Ein Grundverständnis von Kurven, Flächen, Volumen, Flächeninhalt, Abbildungen sowie linearen Objekten, Differentialgleichungen und Vektorfeldern (Magnetisches Feld) sind durchaus Inhalt des Schulstoffs in Mathematik und Physik.

Die Inhalte der Analysis 2 sind ein wesentlicher Teil der 'Sprache' für so gut wie alle Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften und Ökonomie. Im Folgenden möchte ich eine Reihe von Beispielen zeigen.

Wichtigstes Objekt ist der Raum der reellen n Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, den wir mit \mathbb{R}^n bezeichnen.

Die Punkte in \mathbb{R}^2 fassen wir als Punkte in der Ebene auf und die von \mathbb{R}^3 als Punkte im Raum. Wir können die n Tupel addieren. Aus der linearen Algebra kennen Sie das Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

und die euklidische Länge

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Wir sagen, zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt Null ist.

Es gilt die Cauchy-Schwartz'sche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$$

Die Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ für die

$$\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \alpha$$

gilt, ist der Winkel (im Bogenmaß) zwischen zwei Vektoren x, y .

Der Abstand ist gegeben durch

$$d(x, y) = |x - y|.$$

In der Vorlesung werden wir uns insbesondere für Teilmengen des \mathbb{R}^n und Abbildungen von Mengen in \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m interessieren.

Beispiele:

1) Stetige Abbildungen eines Intervalls nach \mathbb{R}^n , die wir Wege und/oder Kurven nennen.

Beispiele:

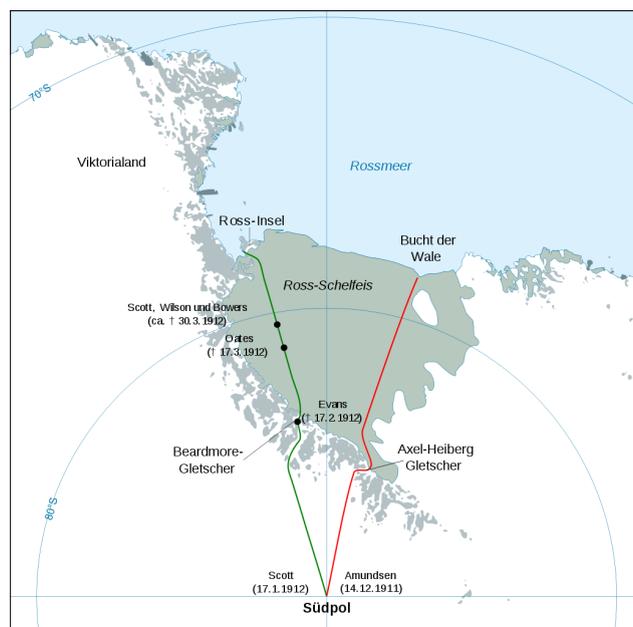
$$(0,1) \ni t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$(-1,1) \ni t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1,1) \ni t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Zur Veranschaulichung kann man die Bahn skizzieren, mit Angaben zum Urbild.



2) Funktionen, d.h. Abbildungen von Teilmengen des \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} .

a. Möglichkeit Niveaulinien

Beispiel: Topographische Karten

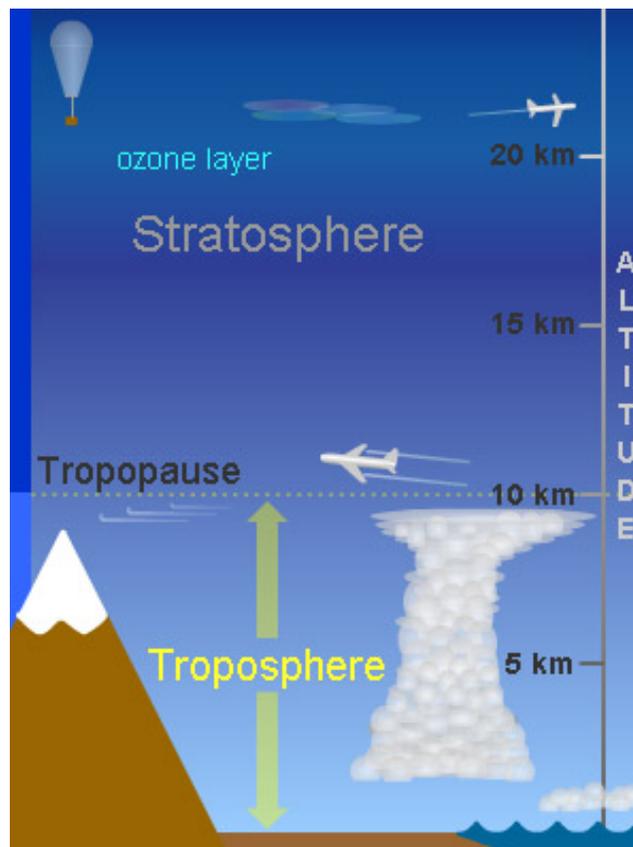


Die Karte zeigt Höhenlinien einer Höhenfunktion, die auf dem Rechteck definiert ist. Wir können die Karte als Beschreibung dieser Funktion lesen und z.B. Maxima, Minima und die Richtung des steilsten Anstiegs ablesen.

Diese Objekte haben eine mathematische Bedeutung, und sie geben uns wertvolle Informationen. Wir können auch das inverse Problem betrachten: Welche Funktion hat diese Höhenlinien? Diese Frage bearbeiten wir beim Lesen von topographischen Karten.

Beispiele: $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, xy , $x + y^2$, der Realteil von $(x + iy)^3$, der Realteil von e^{x+iy} .

b. Möglichkeit Schnitte. Beispiel: Sättigung mit Wasserdampf, eine Funktion des Ortes auf der Erde und der Höhe.



Beispiele: $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, xy , $x + y^2$, Realteil von e^{x+iy} , $z(x^2 + y^2)$, $x^2 + 2y^2 - z^2$, xyz .

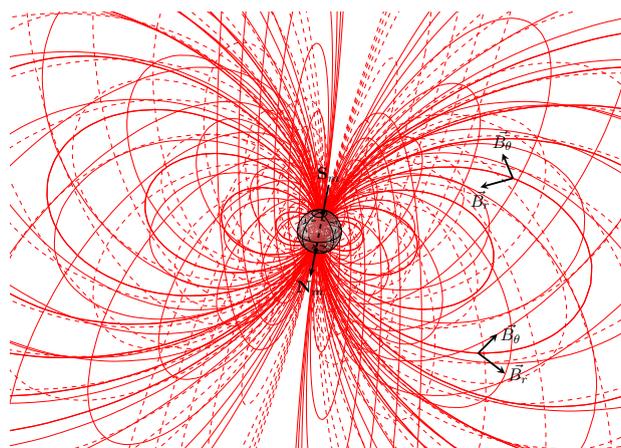
3) Abbildungen. Beispiel Karte,



Inversion am Einheitskreis. Die komplexen Funktionen $z \rightarrow z^2$, $z \rightarrow e^z$ definieren Abbildungen von \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^2 .

Möglichkeiten der Darstellung: Realteil, Darstellung von Kurven im Urbild und Bild.

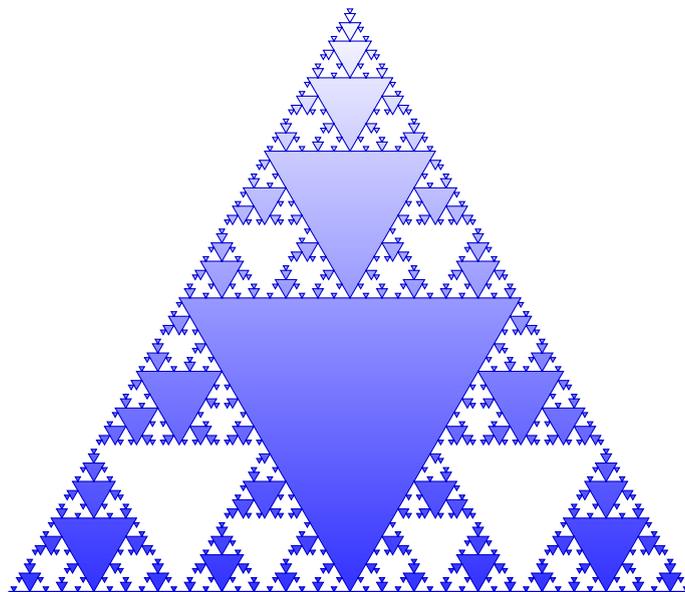
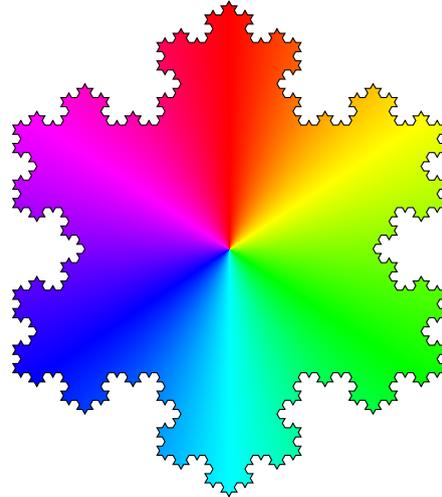
4) Vektorfelder. Beispiel: Magnetfeld



Schematic Earth dipolar magnetic field. The field lines in the page plane are drawn as thick lines, those back with dashed lines and the field lines in front of the page with thin lines.

Ein (Vektor)feld ordnet jedem Punkt einen Vektor zu - z.B. die Anziehungskraft im Sonnensystem.

5) Komplizierte Mengen



Aufgaben:
Niveaulinien und Schnitte von

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

$$f(x, y) = xy + 2$$

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2) - xy$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

$$f(x, y) = \sin(x) + y^2$$

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Literatur: Kabbalo, Einführung in die Analysis 2.

2 Normierte Vektorräume

Eine Vektorraum E über den reellen Zahlen ist eine Menge mit einer kommutativen (vektor)-Addition und einer Multiplikation mit reellen Zahlen. Es gilt immer für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in E$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

Beispiele: \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , die Polynome vom Grad $\leq n$, Funktionen auf einer Menge X , stetige Funktionen auf einem Intervall, stetig differenzierbare Funktionen, k mal stetig differenzierbare Funktionen und $n \times m$ Matrizen.

Definition 2.1. Eine Norm $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$ ist eine Abbildung, die folgende Eigenschaften besitzt:

- 1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in E$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für $x, y \in E$.

Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ heißt normierter Vektorraum.

Beispiele:

- 1) Der Raum \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

ist ein normierter Vektorraum:

$$\|x\|_2 = 0 \iff x = 0$$

$$\|x + y\|^2 = \sum (x_i + y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 + \sum x_i y_i$$

- 2) Der Raum \mathbb{R}^n mit der Maximumsnorm ist ein normierter Vektorraum:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| :$$

$$\|x\|_\infty = 0 \iff x_i = 0 \text{ für alle } i$$

$$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$$

$$\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|\} \leq \max\{|x_i| + |y_i|\} \leq \max_{i,j}\{|x_i| + |y_j|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

3) Der Raum \mathbb{R}^n mit der l^1 Norm

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|$$

ist ein normierter Vektorraum.

4) Sei X eine Menge. Die Funktionen auf X bilden einen Vektorraum. Die beschränkten Funktionen $\mathcal{B}(X)$ bilden einen Untervektorraum. Der Ausdruck

$$\|f\|_{\mathcal{B}(X),sup} = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

ist eine Norm.

5) Sei I ein Intervall. Der Raum der beschränkten stetigen Funktionen $C(I)$ mit der Supremumsnorm ist ein normierter Raum als Untervektorraum von $\mathcal{B}(I)$. Der Raum der beschränkten stetig differenzierbaren Funktionen ist ein Untervektorraum.

6) Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Dann definiert

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

eine Norm auf $C(I)$.

7) Der Raum $Mat(n \times m)$ der $n \times m$ Matrizen mit m Spalten und n Zeilen ist ein Vektorraum mit der Operatornorm

$$\|A\| = \sup\{|Ax| : |x| = 1\}$$

Definition 2.2. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Wir definieren den Abstand

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

auf E .

Der Abstand hat die Eigenschaften

- 1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definition 2.3. Ein metrischer Raum (X, d) ist eine Menge X mit einer Metrik

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty),$$

die diese drei Eigenschaften hat.

Eine Metrik ist ein Abstand zwischen zwei Punkten. Im täglichen Leben kennen wir unterschiedliche Abstandsbegriffe.

Als Abstandsbegriff zwischen Bonn und Berlin bieten sich an:

- 1) Der Abstand im Raum.
- 2) Die Länge der kürzesten Kurve von Bonn nach Berlin.
- 3) Die kürzeste Straßenverbindung von Bonn nach Berlin.
- 4) Der Preis der billigsten Verbindung von Bonn nach Berlin.
- 5) Die Zeit für eine Fahrt mit dem Auto.

Welche dieser Abstandsbegriffe sind Metriken? Welche Annahmen liegen dem zugrunde?
Beispiele.

- 1) Sei X eine Menge, $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$. Diese Metrik heißt diskrete Metrik.
- 2) Jeder normierte Vektorraum definiert einen metrischen Raum.

Wir können eine Reihe von Begriffen auf metrische Räume übertragen.

Definition 2.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und (x_i) eine Folge von Elementen von X . Wir sagen

- 1) (x_i) ist eine Cauchyfolge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein N existiert mit $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ falls $i, j \geq N$.
- 2) (x_i) konvergiert gegen x wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein N existiert mit $d(x_i, x) < \varepsilon$ falls $i \geq N$.
Eine derartige Folge heißt konvergent. Wir schreiben dann $x_i \rightarrow x$ oder $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$.
Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.
- 3) Wir nennen (X, d) vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.
- 4) Ein normierter Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ wird Banachraum genannt, wenn er als metrischer Raum vollständig ist.
- 5) Wir nennen x Häufungswert, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und $N > 0$ ein $i > N$ existiert mit $d(x, x_i) < \varepsilon$.
- 6) Seien (X, d) und (Y, δ) metrische Räume. Wir nennen eine Abbildung

$$f : X \rightarrow Y$$

folgenstetig, wenn für jede konvergente Folge (x_i) auch $f(x_i)$ konvergent ist.

- 7) Wir nennen eine Folge x_i in einem normierten Vektorraum beschränkt, wenn $\|x_i\|$ eine beschränkte Folge ist.

Wir betrachten zunächst den \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm und der daraus konstruierten Metrik. Eine Folge x^i konvergiert genau, wenn jede Koordinate x_j^i konvergiert. Jede Folge ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn jede Koordinate eine Cauchyfolge ist. Damit ist der euklidische Raum vollständig. Es gilt

Satz 2.5. Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n hat einen Häufungswert bzw. eine konvergente Teilfolge.

3 Stetige Funktionen

Definition 3.1. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Wir nennen eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig wenn für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d_Y(f(x), f(z)) < \varepsilon \quad \text{falls } d_X(x, z) < \delta$$

Stetigkeit ist äquivalent zur Folgenstetigkeit.

Lemma 3.2. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann ist $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn

$$x_i \rightarrow x \quad \text{in } X \quad \implies \quad f(x_i) \rightarrow f(x) \quad \text{in } Y.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst: Stetigkeit impliziert Folgenstetigkeit. Sei f stetig, (x_j) eine Folge, die gegen x konvergiert und $\varepsilon > 0$. Wir suchen N so dass

$$d_Y(f(x), f(x_j)) < \varepsilon$$

falls $j \geq N$. Da f stetig ist existiert $\delta > 0$ so dass

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{falls } d_X(x, y) < \delta.$$

Da $x_j \rightarrow x$ existiert N so dass $d_X(x_j, x) < \delta$ falls $j \geq N$. Dann folgt $d_Y(f(x), f(x_j)) < \varepsilon$ für diese Indizes.

Nun zeigen wir: Ist f nicht stetig, dann ist f auch nicht folgenstetig. Wir negieren die Aussage der Stetigkeit: Es existieren $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ so dass für alle $\delta > 0$ ein y existiert mit $d_X(x, y) < \delta$ und $d_Y(f(x), f(y)) > \varepsilon$. Insbesondere existiert eine Folge x_j mit $d_X(x, x_j) < \frac{1}{j}$ und $d_Y(f(x), f(x_j)) \geq \varepsilon$. Das widerspricht der Folgenstetigkeit. \square

Wir werden die Begriffe Stetigkeit in einem Punkt in der offensichtlichen Bedeutung verwenden. Jede Teilmenge eines metrischen Raumes ist wieder ein metrischer Raum. Ist $A \subset X$ eine derartige Teilmenge, dann beziehen wir uns in Aussagen wie $f : A \rightarrow Y$ ist stetig auf die auf A eingeschränkte Metrik von X .

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so ist die Menge aller Paare $X \times Y$ mit der Metrik

$$d_{X \times Y}((x_2, y_2), (x_1, y_1)) = \max\{d_X(x_2, x_1), d_Y(y_2, y_1)\}$$

ein metrischer Raum (Übungsaufgabe).

Wir verwenden die Begriffe Funktion und Abbildung ohne scharfe Abgrenzung. Eine Funktion hat eher Werte in einem Vektorraum und insbesondere \mathbb{R} , und eine Abbildung hat eher Werte in einer Menge.

Stetige Abbildungen haben eine Reihe von Eigenschaften, deren Beweis sich nicht von dem für stetige Funktionen auf Intervallen aus Analysis 1 unterscheidet.

Lemma 3.3. *Die Komposition stetiger Abbildungen sind stetig. Summe und Produkt stetiger Funktionen sind stetig. Der Quotient stetiger Funktionen ist stetig, falls der Nenner nie verschwindet.*

Beispiele stetiger Abbildungen.

- 1) Sei F ein normierter Raum. Dann ist jede lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach F stetig.
- 2) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Dann ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(x_0, x)$ stetig. Insbesondere ist für normierte Vektorräume $(E, \|\cdot\|)$ die Norm stetig.
- 3) Sei wieder (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Metrik als Abbildung von $X \times X$ nach \mathbb{R} stetig.
- 4) Summe und Skalarprodukt eines normierten Vektorraums sind stetig.

Konkretere Beispiele:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x^4 + y^4 \\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow |x|^{-1} \\ \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } x, y \text{ nicht beide Null} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } x, y \text{ nicht beide Null} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Definition 3.4 (Gleichmäßige Konvergenz.). Seien X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum, $f, f_j : X \rightarrow Y$ Abbildungen. Wir sagen die Folge f_j konvergiert gleichmäßig gegen f , falls für alle $\varepsilon > 0$ ein N existiert mit

$$d_Y(f_j(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{für } x \in X \text{ und } j \geq N$$

Satz 3.5. Der gleichmäßige Limes stetiger Abbildungen ist stetig

Beweis. Seien $f_j : X \rightarrow Y$ ein Folge von Abbildungen des metrischen Raumes X in den metrischen Raum Y , die gleichmäßig gegen f konvergieren. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir suchen $\delta > 0$ so dass $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ falls $d_X(x, y) < \delta$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz existiert N mit

$$d_Y(f_j(y), f(y)) < \varepsilon/3 \quad \text{für } j \geq N$$

Da f_N stetig ist existiert δ so dass

$$d_Y(f_N(y), f_N(x)) < \varepsilon/3 \quad \text{für } d_X(x, y) < \delta.$$

Sei nun $d_X(x, y) < \delta$. Wir verwenden die Dreiecksungleichung:

$$d_Y(f(x), f(y)) < d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(y)) + d_Y(f_N(y), f(y)) < \varepsilon$$

Damit ist f stetig. □

Wir erhalten eine wichtige Folgerung.

Satz 3.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die beschränkten stetigen Funktionen $C_b(X)$ bilden einen Banachraum mit der Supremumsnorm.

Beweis. Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten.

Schritt 1. Die beschränkten Funktionen $\mathcal{B}(X)$ mit der Supremumsnorm sind ein Banachraum.

Beweis. Sei f_n eine Cauchyfolge. Da für alle $x \in X$ $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \|f_i - f_j\|_{sup}$ ist dann auch $f_j(x)$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen. Wir definieren

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

Sei $\varepsilon > 0$ und N so dass

$$\|f_i - f_j\|_{sup} < \varepsilon/2$$

für $i, j \geq N$. Dann folgt

$$|f_i(x) - f(x)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon/2$$

für $i \geq N$ und daher

$$\|f_i - f\|_{sup} < \varepsilon.$$

Damit ist f beschränkt und $f_j \rightarrow f$ in $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_{sup})$.

Schritt 2. Die stetigen Funktionen sind ein Banachraum.

Die stetigen Funktionen sind ein Untervektorraum von $\mathcal{B}(X)$. Sei (f_j) eine Cauchyfolge stetiger Funktionen bezüglich der Supremumsnorm. Nach Schritt 1 existiert ein Limes in $\mathcal{B}(X)$. Die Konvergenz in der Supremumsnorm ist äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz. Nach Satz (3.6) ist der Limes f stetig. Damit konvergiert die Cauchyfolge in $C_b(X)$. □

Satz 3.7. [Banach'scher Fixpunktsatz] Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\phi : X \rightarrow X$ eine strikte Kontraktion, d.h. es existiert $\gamma < 1$ mit $d(\phi(x), \phi(y)) < \gamma d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Dann hat X genau einen Fixpunkt.

Beweis. Sei $x_0 \in X$. Wir definieren rekursiv

$$x_j = \phi(x_{j-1}).$$

Dann folgt

$$d(x_{j+1}, x_j) = d(\phi(x_j), \phi(x_{j-1})) \leq \gamma d(x_j, x_{j-1}) \leq \gamma^j d(x_1, x_0)$$

und, für $j > i$, mit einer mehrfachen Anwendung der Dreiecksungleichung,

$$d(x_j, x_i) \leq \sum_{l=i}^{j-1} d(x_{l+1}, x_l) \leq \sum_{l=i}^{j-1} \gamma^l = \gamma^i \sum_{l=0}^{j-i-1} \gamma^l \leq \frac{\gamma^i}{1-\gamma}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null, und daher ist die Folge x_j eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist konvergiert die Folge gegen ein $x \in X$. Es folgt mit der Stetigkeit

$$d(\phi(x), x) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(\phi(x_j), x_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{j+1}, x_j) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma^j = 0$$

und mit der ersten Eigenschaft der Metrik $\phi(x) = x$.

Gibt es einen zweiten Punkt y mit $\phi(y) = y$ so folgt

$$d(x, y) = d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma d(x, y)$$

Da $\gamma < 1$ folgt $d(x, y) = 0$ und daher $x = y$. □

3.1 Eine Anwendung auf Differentialgleichungen: Picarditeration

Wir suchen eine differenzierbare Funktion $y(t)$, die

$$(3.1) \quad y'(t) = y(t) \quad y(0) = 1$$

genügt. Eine solche Funktion ist die Exponentialfunktion. Wir gehen zur Integralformulierung über:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds$$

Dann wird y als Fixpunkt dieser Integralgleichung beschrieben. Wir suchen zunächst eine Lösung auf $[-1, 1]$ in $C_b([-1, 1])$. Sei $\phi : C_b([-1/2, 1/2]) \rightarrow C_b([1/2, 1/2])$ durch

$$\phi(y)(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds$$

definiert. Die gesuchte Lösung ist dann Fixpunkt von

$$y = \phi(y)$$

gegeben. Wir berechnen

$$\|\phi(y_2) - \phi(y_1)\|_{\text{sup}, [-1/2, 1/2]} = \sup_{|t| \leq \frac{1}{2}} \left| \int_0^t (y_2(s) - y_1(s)) ds \right| \leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|_{\text{sup}}$$

Der Banach'sche Fixpunktsatz stellt die Existenz genau einer stetigen Lösung der Integralgleichung sicher. Aufgrund der Integralgleichung ist der Fixpunkt differenzierbar und er genügt der Differentialgleichung (3.1).

Das Argument können wir für andere Anfangswerte als 1 und andere Anfangszeiten t_0 wiederholen.

Diese Argumentation überträgt sich auf Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(t, y).$$

Wir formulieren die Aussage als Satz.

Satz 3.8. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die Konstanten $C(n)$ und $L(n)$ existieren mit

$$\begin{aligned} |f(t, 0)| &\leq C(n) && \text{für } |t| \leq n \\ |f(t, u_2) - f(t, u_1)| &\leq L(n)|u_2 - u_1| && \text{für } |t| \leq n, u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Seien $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine stetig differenzierbare Abbildung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y'(t) &= f(t, y) && \text{für } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beweis. Schritt 1: Umformulierung als Integralgleichung. Mit dem Hauptsatz erhalten wir

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Wir wählen $n \geq |t_0| + 1$. Seien $y_2, y_1 \in C_b([y_0 - d, y_0 + d])$ wobei wir $d \leq 1$ später bestimmen werden. Wir definieren $\phi : C_b([t_0 - d, t_0 + d]) \rightarrow C_b([y_0 - d, y_0 + d])$ durch

$$\phi(y)[t] = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} \|\phi(y)(t)\|_{\text{sup}} &= \sup_{|t-t_0| \leq d} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq |y_0| + d \sup_{|t-t_0| \leq d} |f(s, y(s))| \\ &\leq |y_0| + d(C(n) + L(n) \sup_{|t-t_0| \leq d} |y(s)|) \\ &= |y_0| + d(C(n) + L(n)\|y\|_{\text{sup}}) \end{aligned}$$

und ϕ bildet den Raum $C_b([t_0 - b, t_0 + b])$ auf sich selbst ab.

Seien y_2 und y_1 beschränkte stetige Funktionen auf $[t_0 - d, t_0 + d]$. Wir erhalten

$$\|\phi(y_2) - \phi(y_1)\|_{sup, [t_0-d, t_0+d]} = \sup_{|t-t_0| \leq d} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_2) - f(s, y_1) ds \right| \leq L(n)d \|y_2 - y_1\|_{sup}.$$

Damit ist ϕ eine Kontraktion falls $d \leq \min\{1, L(n)^{-1}\}$.

Die Fixpunkt y ist eindeutig, und es gibt höchstens eine Lösung der Differentialgleichung. Nach dem Hauptsatz ist die rechte Seite der Fixpunktgleichung stetig differenzierbar, und wir erhalten die gewünschte Lösung.

Schritt 2: Wir können dieses Verfahren mit dem Anfangswert $\tilde{y}_0 = y(t_0 + d)$ und $\tilde{t}_0 = t_0 + d$ und den gleichen Konstanten wiederholen, notfalls mehrfach, bis wir $t_0 + 1$ erreichen. Nun können wir dieses gesamte Verfahren iterieren, und wir erhalten $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit den gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung. Diese Argumentation ergibt das gleiche Resultat für Systeme von Differentialgleichungen. Wir betrachten eine stetige Abbildung

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und nehmen an, dass für jedes n Konstanten $C(n)$ und $L(n)$ existieren mit

$$|F(t, 0)| \leq C(n) \quad \text{für } |t| \leq n$$

$$|F(t, u_2) - F(t, u_1)| \leq L(n)|u_2 - u_1| \quad \text{für } |t| \leq n, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$y_j'(t) = F_j(t, y(t)) \quad y_j(t_0) = y_j^0$$

Der selbe Beweis ergibt die Existenz von genau einem n Tupel von Funktionen $y_j \in C^1(\mathbb{R})$.

4 Topologische Begriffe

In dieser Vorlesung betrachten wir Teilmengen des \mathbb{R}^n und allgemeinerer metrischer Räume. Der Begriff des Randes einer Menge ist von offensichtlichem Interesse. Zentraler werden die Begriffe offen, abgeschlossen und kompakt sein.

Sei (X, d) ein metrischer Raum - wir werden dabei an \mathbb{R}^2 mit dem euklidischen Abstand denken. Sei $x_0 \in X$ und $r > 0$. Die Menge

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

heißt Ball vom Radius r um x_0 .

Für $x \in X$ und eine Teilmenge $A \subset X$ gilt genau eine der folgenden Alternativen:

- 1) Es existiert ein r so dass $B_r(x) \subset A$

- 2) Es existiert ein r so dass $B_r(x) \cap A = \{ \}$
- 3) Jeder Ball $B_r(x)$ schneidet A und sein Komplement.

Definition 4.1. Ein Punkt $x \in X$ heißt Randpunkt von A , wenn jeder Ball um x sowohl Punkte von A wie auch von $X \setminus A$ enthält. Die Menge aller Randpunkte bezeichnen wir mit ∂A .

Ein Punkt $x \in X$ heißt innerer Punkt von A , wenn ein $r > 0$ existiert mit $B_r(x) \subset A$. Die Menge aller inneren Punkte bezeichnen wir mit $\overset{\circ}{A}$.

Der Abschluß $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ ist die Vereinigung des Inneren und des Randes.

Eine Menge A heißt offen falls $\overset{\circ}{A} = A$, und abgeschlossen falls $\bar{A} = A$.

Lemma 4.2. Die Menge A ist abgeschlossen genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Beispiele: Offene / abgeschlossene Intervalle, Ball, abgeschlossener Ball, Gerade in \mathbb{R}^2 , Kreis in \mathbb{R}^2 , Graph einer Funktion auf \mathbb{R} (Stetigkeit) (zum Beispiel x^{-1} , mit 0 in 0). Der ganze Raum, $\{ \}$. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Lemma 4.3. x ist genau dann ein Randpunkt, wenn eine Folge (x_n) in A und (y_n) in $X \setminus A$ existieren mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow x$.

Definition 4.4. Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt von A in X wenn eine Folge (x_j) in A existiert, in der nicht alle Folgenglieder gleich x sind und mit $x_j \rightarrow x$ für $j \rightarrow \infty$.

Eine Menge A heißt dicht, wenn jeder Punkt in x Häufungspunkt ist.

Beispiele oben.

Lemma 4.5. Eine Menge $A \in X$ in einem metrischen Raum (X, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn jede konvergente Folge in A einen Grenzwert in A besitzt.

Beweis. Sei A abgeschlossen, und (x_n) eine konvergente Folge mit $x_n \in A$ und Grenzwert $x \in X$. Falls $x \notin A$ dann ist x ein Randpunkt. Aber alle Randpunkte liegen in A da A abgeschlossen ist.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Es genügt zu zeigen: Alle Randpunkte liegen in A . Sei also $x \in \partial A$ ein Randpunkt. Dann existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \rightarrow x$. Nach Annahme ist dann $x \in A$. □

Definition 4.6. Die Menge A heißt (folgen) kompakt, falls jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Limes in A besitzt.

Im \mathbb{R}^n existiert eine einfache Charakterisierung von Kompaktheit.

Satz 4.7. $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Sei A kompakt. Wäre A unbeschränkt, so gäbe es eine Folge (x_j) mit $|x_j| \geq j$. Diese Folge hat keine konvergente Teilfolge. Also ist A beschränkt. Sei nun (x_j) eine Cauchyfolge in A . Da \mathbb{R}^n vollständig ist existiert ein Limes $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in \mathbb{R}^n$. Da A kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A . Dann folgt $x \in A$ und A ist abgeschlossen.

Umgekehrt gibt es nach Satz 2.5 zu jeder Folge in der beschränkten Menge A eine konvergente Teilfolge. Da A abgeschlossen ist, liegt deren Grenzwert in A . □

Lemma 4.8. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn alle Urbilder offener Mengen offen sind:

$$A \subset Y \text{ offen} \implies f^{-1}(A) \text{ offen}$$

Beweis. Sei f stetig, $A \subset Y$ offen und $x \in X$ mit $f(x) \in A$. Wir müssen ein $r > 0$ finden, so dass $f(y) \in A$ falls $d_X(x, y) < r$. Da A offen ist existiert $\rho > 0$ mit $B_\rho^Y(f(x)) \subset A$. Da f stetig ist existiert r so dass $d_Y(f(x), f(y)) < \rho$ falls $d_X(x, y) < r$. Damit ist die erste Richtung gezeigt. Wir betrachten die Umkehrung. Sei $f^{-1}(A) \subset X$ offen für alle offenen Mengen $A \subset Y$. Sei $x \in X$ und $\rho > 0$. Wir müssen $r > 0$ finden mit $d_Y(f(x), f(y)) < \rho$ falls $d_X(x, y) < r$. Der Ball $B_\rho^Y(f(x))$ ist offen. Nach Annahme ist dann das Urbild $f^{-1}(B_\rho^Y(f(x)))$ offen. x liegt darin. Da die Menge offen ist enthält sie einen Ball $B_r(x)$. Dieses r hat die gewünschte Eigenschaft. \square

Wir erhalten eine sehr allgemeine Aussage über die Existenz von Extremwerten.

Satz 4.9. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ kompakt und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f das Maximum und das Minimum an.

Beweis. Sei $x_j \in A$ eine Folge mit

$$f(x_j) \rightarrow \sup_{x \in A} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Da A kompakt ist existiert eine konvergente Teilfolge $x_{j_i} \rightarrow x \in A$. Da f stetig ist folgt

$$f(x_{j_i}) \rightarrow f(x) = \sup_y f(y).$$

Für das Minimum wenden wir das Argument auf $-f$ an. \square

Daraus folgt zum Beispiel die Äquivalenz aller Normen auf einem endlich-dimensionalen normierten Raum.

Satz 4.10. Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum, $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf E . Dann existiert C mit

$$C^{-1}\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|$$

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Lemma 4.11. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume, E endlich dimensional, $A : E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Dann ist A stetig.

Beweis. Sei n die Dimension von E und $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von E . Jedes $x \in E$ ist dann gegeben durch $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ und $\|x\|_{1,E,\mathcal{B}} := \sum_{j=1}^n |x_j|$ definiert eine Norm auf E . Mit der Abkürzung $M := \max \|Ae_j\|_F$ gilt dann auf Grund der Linearität von A offensichtlich

$$\|Ax\|_F \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|Ae_j\|_F \leq M \|x\|_{1,E,\mathcal{B}}.$$

Da E endlich dimensional ist, sind alle Normen auf E äquivalent. Insbesondere kann man ein $C > 0$ finden, so dass

$$\|x\|_{1,E,\mathcal{B}} \leq C\|x\|_E$$

gilt. Mit $L := CM$ ist dann also

$$\|Ax\|_F \leq L\|x\|_E.$$

Die Anwendung dieser Aussage auf $x - y$ statt x zeigt die Stetigkeit von A . □

5 Wege, Zusammenhang und Weglänge

Lernziel dieses Abschnitts ist

- 1) das Verständnis des Begriffs des Weges, der Weglänge und des Wegzusammenhangs.
- 2) die Fähigkeit, für gegebene Wege eine Integralformel für die Weglänge aufstellen zu können, und diese Integrale in Einzelfällen auswerten zu können
- 3) ein qualitatives Verständnis der Weglänge z.B. : Die Strecke zwischen zwei Punkten ist die kürzeste Verbindung.
- 4) ein Verständnis der Bogenlänge im Kontext des Kreises, die Verbindung zu trigonometrischen Funktionen und das Verfahren des Archimedes zur Bestimmung der Länge des Einheitskreises.

Definition 5.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Weg γ ist eine stetige Abbildung eines Intervalls nach X . Die Bahn des Weges (γ) ist die Menge alle Bildpunkte.

Der Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ existiert mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Beispiele:

- 1) Eine Teilmenge von \mathbb{R} ist genau dann wegzusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.
- 2) Der \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend: Für $x, y \in X$ liegt die Strecke $[x, y]$ in X . $\gamma(t) = x + t(y - x)$ ist der gesuchte Weg.
- 3) Die Menge der invertierbaren reellen Matrizen ist nicht wegzusammenhängend.
- 4) Die Menge

$$\{(x, \sin(1/x)) : x \neq 0\} \cup \{(0, y) : |y| \leq 1\}$$

ist abgeschlossen aber nicht wegzusammenhängend.

- 5) Die Funktion f auf einem Intervall ist genau dann stetig, wenn der Graph der Funktion wegzusammenhängend ist. (Ist f stetig, $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ zwei Punkte mit $a < b$, so ist $[a, b] \ni t \rightarrow (t, f(t))$ ein Weg von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$. Umgekehrt: Ist $\gamma : [c, d] \rightarrow (\gamma_1(t), f(\gamma_1(t)))$ ein stetiger Weg, so folgt aus der Existenz die Folgenstetigkeit von f .)

5.1 Weglänge und differenzierbare Wege

Definition 5.2. Die Weglänge $L(\gamma)$ eines Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ist durch

$$\sup_{\tau} \sup_{t_0, \dots, t_n \in \tau} \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1}))$$

definiert. Hier bezeichnet τ Partitionen von $[a, b]$.

Bemerkung: Die Strecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eines normierten Vektorraums. Dies folgt aus der Dreiecksungleichung.

Lemma 5.3. *Ist $\phi : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ eine Kontraktion (oder allgemeiner $d_Y(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$) so folgt $L(\phi \circ \gamma) \leq L(\gamma)$ (bzw $L(\phi \circ \gamma) \leq CL(\gamma)$).*

Die Weglänge hängt nur von der Bahn des Weges ab - zumindest wenn es keine Überschneidungen gibt.

Die Weglänge ist das Supremum über die Summen aller Strecken eines Streckenzuges mit konsekutiven Punkten auf der Bahn. Durch Hinzufügen von Punkten wird der Streckenzug länger. Um sicherzustellen, dass das Supremum angenommen wird, genügt es eine obere Schranke anzugeben. Für stetig differenzierbare Wege können wir die Weglänge durch ein Integral ausdrücken.

Definition 5.4. *Der Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (k -mal) stetig differenzierbar, wenn jede der Funktionen γ_i stetig differenzierbar ist. Er heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Partition gibt, für die diese Funktionen auf jedem Teilintervall differenzierbar sind.*

Satz 5.5. *Die Weglänge eines stückweise differenzierbaren Weges mit der Partition*

$$a = t_0 < t_1 \dots t_n = b$$

ist

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sum_i |\gamma'_i(s)|^2 \right)^{1/2} ds$$

Beweis. Es genügt, stetig differenzierbare Wege zu betrachten. Da eine Verfeinerung der Partition die Summe über die Längen höchstens vergrößert genügt es, Partitionen zu betrachten, deren Intervalle nicht länger als eine vorgegebene Größe δ sind. Da die Ableitungen der Komponenten stetig auf einem kompakten Intervall sind, sind sie auch gleichmäßig stetig. Zu gegebenem ε finden wir also ein $\delta_j > 0$ mit

$$|\gamma_j(t) - \gamma_j(s)| < \varepsilon/n$$

falls $|s - t| < \delta_j$. Wir wählen das kleinste $\delta = \min \delta_j$. Damit erhalten wir für die Intervalle der Partition

$$\begin{aligned} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) - (t_{j+1} - t_j)\gamma'(t_j)| &= \left| \sum_i \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma'_i(s) - \gamma'_i(t_j) \right| \\ &\leq (t_{j+1} - t_j) \sum_i \sup_{t_j \leq s \leq t_{j+1}} |\gamma'_i(s) - \gamma'_i(t_j)| \\ &\leq \varepsilon |t_{j+1} - t_j| \end{aligned}$$

Wir summieren über die Partitionen und erhalten

$$\left| \sum_j |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| - (t_{j+1} - t_j)|\gamma'(t_j)| \right| \leq \varepsilon(b - a) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Andererseits liegt

$$\sum_j (t_{j+1} - t_j) |\gamma'(t_j)|$$

zwischen jeder Unter- und Obersumme der Partition für

$$\int_a^b |\gamma'(s)| ds$$

und

$$\sum_j (t_{j+1} - t_j) \sup_{t_j \leq s \leq t_{j+1}} |\gamma'(s)| - \inf_{t_j \leq s \leq t_{j+1}} |\gamma'(s)| \leq \varepsilon(b - a).$$

Damit folgt

$$\sum_j |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| \leq \int_a^b |\gamma'(s)| ds$$

und für jedes $\varepsilon > 0$ und jede Partition der Feinheit $< \delta$ (d.h. Differenz zweier aufeinanderfolgender Punkte $< \delta$) folgt

$$\int_a^b |\gamma'(s)| ds < \sum_j |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| + \varepsilon.$$

□

Der Beweis impliziert die sehr erwünschte Eigenschaft:

Lemma 5.6. *Die Verbindungsstrecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten im \mathbb{R}^n .*

Das wichtigste Beispiel ist der Einheitskreis. Die obere Hälfte ist der Graph von $\sqrt{1 - x^2}$ für $-1 \leq x \leq 1$. Dies entspricht dem Bogen des Weges

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Bogens von $\gamma(x_0)$ nach $\gamma(1) = (1, 0)^T$ für ein festes $x_0 \in [-1, 1]$ ist genau das Bogenmaß des Winkels zwischen der x -Achse und der Verbindung von $\gamma(x_0)$ mit dem Nullpunkt. Dieser Winkel ist also gegeben durch

$$\int_{x_0}^1 \left(1 + \frac{t^2}{(1 - t^2)}\right)^{1/2} dt = \int_{x_0}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Der Cosinus dieses Winkels ist aber die x -Koordinate von $\gamma(x_0)$. Daher gilt

$$x_0 = \cos \left(\int_{x_0}^1 \left(1 + \frac{t^2}{(1 - t^2)}\right)^{1/2} dt \right)$$

und damit

$$\arccos(x_0) = \int_{x_0}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

für jedes $x_0 \in [-1, 1]$. Diese Formel hat zwei interessante Aspekte: Auf der einen Seite haben wir so eine Stammfunktion bestimmt. Auf der anderen Seite könnten wir die Umkehrfunktion des \cos und damit den \cos selbst durch dieses Integral definieren.

Genauso erhalten wir

$$\arcsin(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Wir entnehmen der Definition dass sich die Weglänge unter Isometrien, also unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen nicht ändert. Insbesondere hängt die Bogenlänge, als die Weglänge des Bogens über einem Winkel nur von dem Winkel ab.

Beim Verfahren des Archimedes bestimmt man rekursiv den Umfang des eingeschriebenen 32^n Ecks. Die Konvergenz gegen π folgt dann aus der Definition der Weglänge, und einer oberen Schranke. Die obere Schranke erhält man über Lemma 5.3 und die Abbildung eines Achtelkreises auf den Schnitt von Tangente und des Strahles von 0 to dem Punkt.

1) $\gamma : [0, 10] \ni t \rightarrow (t, t), L(\gamma) = 10\sqrt{2},$

2) $\gamma : [0, 10] \ni t \rightarrow (t, \frac{1}{2}t^2)$

$$L(\gamma) = \int_0^{10} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^{10} = 5\sqrt{101} + \frac{1}{2} \ln(10 + \sqrt{101})$$

3) $\gamma : [0, 4\pi] \ni t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{2} dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

Definition 5.7. Wir sagen, ein Weg ist bezüglich der Weglänge parametrisiert wenn

$$L(\gamma|_{[s,t]}) = t - s$$

für alle $s < t$ im Definitionsintervall.

Ein Vergleich mit der Definition zeigt, dass ein stetig differenzierbarer Weg genau dann bezüglich der Weglänge parametrisiert ist wenn

$$|\gamma'(s)| = 1$$

in dem Definitionsintervall.

Lemma 5.8. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ein Weg der Länge L , für den kein nichttriviales Intervall existiert, auf dem γ konstant ist. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\rho : [0, L] \rightarrow [a, b]$ so dass $\gamma \circ \rho$ bezüglich der Weglänge parametrisiert ist.

Beweis. Wir definieren γ als die Umkehrabbildung von

$$[a, b] \ni s \rightarrow f(s) = L(\gamma|_{[a,s]}).$$

Die Abbildung $s \mapsto f(s)$ ist offensichtlich monoton und strikt monoton. Wenn sie stetig ist hat die Umkehrfunktion die gewünschten Eigenschaften. Wir müssen also die Stetigkeit zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition existiert eine Partition $a < t_0 < t_1 \cdots < t_n < b$ mit

$$L(\gamma) - \varepsilon < \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_{j+1}), \gamma(t_j)) \leq L(\gamma).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit (das Argument von Analysis 1 gilt hier) dürfen wir annehmen: $d(\gamma(t_{j+1}), \gamma(t_j)) < \varepsilon$ Dann folgt aber

$$L(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) \leq d(\gamma(t_{j+1}), \gamma(t_j)) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Das impliziert aber die Stetigkeit von f . □

5.2 Wegintegrale

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei verschiedene Wegintegrale. Wir definieren sie analog zu Riemannintegralen.

Definition 5.9. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ein Weg mit der Weglänge $L < \infty$, $f : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren

$$\int_{\gamma} f ds$$

als die reelle Zahl, für die für alle ε ein δ existiert, so dass für jede Partition $a = t_0 < \dots < t_n = b$ der Feinheit $\leq \delta$

$$\left| \int_{\gamma} f ds - \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) \right| < \varepsilon$$

Wie bei Satz 5.5 sehen wir: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar so gilt

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(s)) |\gamma'(s)| ds.$$

Interpretation: Ist γ eine Reiseroute dann ist die Weglänge die zurückgelegte Strecke, die, falls γ differenzierbar ist durch

$$\int_a^b v dt$$

gegeben ist, wobei $v = |\gamma'|$ die Momentangeschwindigkeit ist.

Sei die Bahn von γ ein Draht, und ρ das Gewicht pro Längeneinheit, dann ist

$$(5.1) \quad m = \int_{\gamma} \rho ds$$

das Gewicht des Drahtes. Für $\rho = 1$ erhalten wir die Weglänge. Der Punkt x mit den Koordinaten

$$(5.2) \quad x_j = \frac{1}{m} \int x_j \rho ds$$

ist der Schwerpunkt. Der Schwerpunkt hat eine große Bedeutung in der Physik, aber nicht nur dort. Hier definieren wir den Schwerpunkt.

Beispiele:

- 1) Das Parabelstück über $[0, 1]$ mit $\rho = 1$. Der Schwerpunkt hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ mit

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt s_1 = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} t dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^{1/2} dt = \frac{3}{4} (2^{3/2} - 1)$$

Das linke Integral haben wir oben bestimmt: Es ist

$$\frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$$

und

$$\frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) s_2 = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} t^2 dt$$

dieses Integral kann ich nicht mehr auswerten.

- 2) Der Einheitskreis mit $\rho = 1$. Masse: 2π . Schwerpunkt 0.

- 3) Der Halbkreis. Die Masse ist π . Der Schwerpunkt hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$ mit

$$s = \pi^{-1} \int_0^\pi \sin(s) ds = \frac{2}{\pi}.$$

- 4) Ist $\gamma(t)$ eine Reiseroute, und f der Verbrauch je Kilometer, so ist $\int_\gamma f ds$ der gesamte Verbrauch. f kann z.B. das sich ändernde Gewicht eines Flugzeuges oder den unterschiedlichen Verbrauch eines Autos je nach Steigung berücksichtigen.

Das zweite Wegintegral integriert ein stetiges Vektorfeld.

Definition 5.10. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg mit der Weglänge $L < \infty$, $F : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Wir definieren

$$\int_\gamma F d\vec{x}$$

als die reelle Zahl, für die für alle ε ein δ existiert, so dass für eine Partition $a < t_0 < \dots < t_n < b$ der Feinheit δ

$$\left| \int_\gamma F d\vec{x} - \sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)) (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \rangle \right| < \varepsilon$$

Wie bei Satz 5.5 sehen wir: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar so gilt

$$\int_\gamma F d\vec{x} = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

Interpretation: Ist F ein Kraftfeld so gibt das Integral die geleistete Arbeit an. Das Graviationskraftfeld auf der Erde auf einen Körper der Masse m ist in erster Näherung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gm \end{pmatrix}$ wobei

g die Erdbeschleunigung ist. Damit ist bei einer Reise von Meereshöhe zur Höhe h die von der Gravitationskraft geleistete Arbeit

$$-hmg.$$

Wir nennen einen Weg γ geschlossen, wenn Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen.

Seien jetzt $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei Punkte im \mathbb{R}^2 . Der vorzeichenbehaftete Flächeninhalt des von 0 und den zwei Punkten aufgespannten Dreiecks ist 1/2 mal

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -y_2(x_2 - x_1) + x_1(y_2 - y_1)$$

Ein Vergleich mit der Summenformel für das Integral zeigt, dass der vorzeichenbehaftete Flächeninhalt A des geschlossenen Weges γ durch

$$(5.3) \quad \int_{\gamma} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} d\vec{x}$$

gegeben ist.

Beispiele: Der Flächeninhalt des Einheitskreises, Parametrisierung durch $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Der Flä-

cheninhalt der oberen Hälfte, Parametrisierung durch $\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$, $|t| \leq 1$.

Ein Zangenamperemeter misst den Strom durch einen Leiter, in dem es das Magnetfeld entlang eines geschlossenen Weges um den Leiter integriert. Bis auf physikalische Konstanten gilt

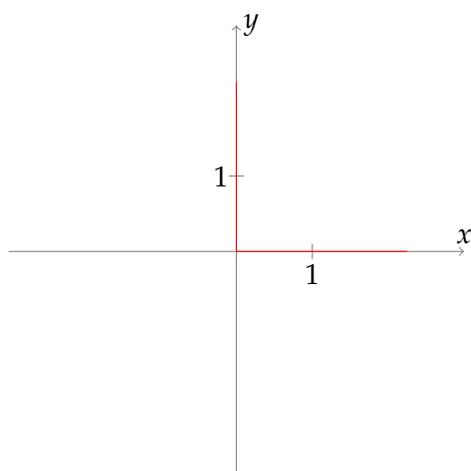
$$A = \int_{\gamma} B d\vec{x}$$

wobei B das Magnetfeld und γ ein richtig orientierter Weg um den Leiter ist.

Beispiel: $F(x) = |x|^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

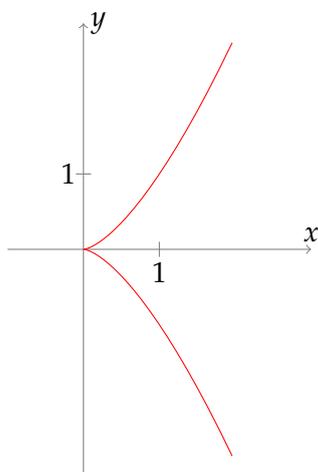
Beispiele für Wege.

$$\gamma(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } t < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$



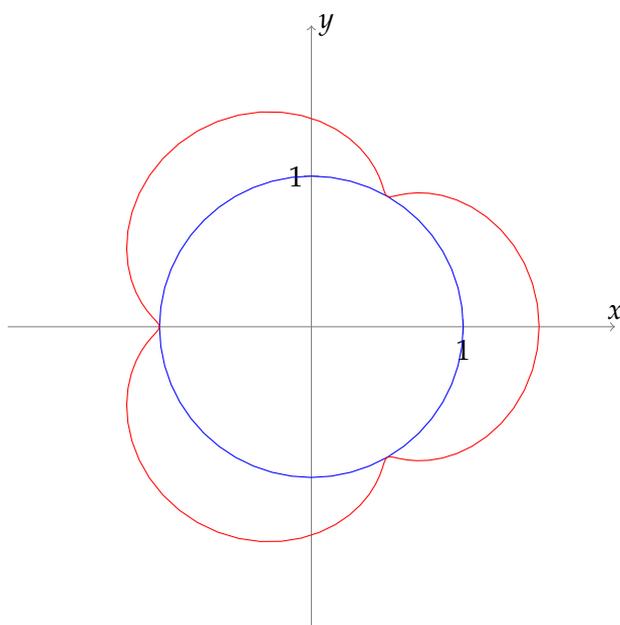
Die Cusp

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

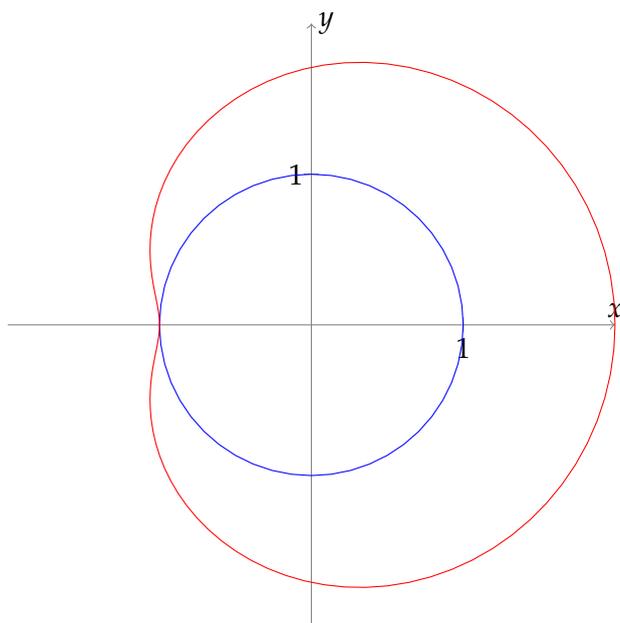


Epizykloiden

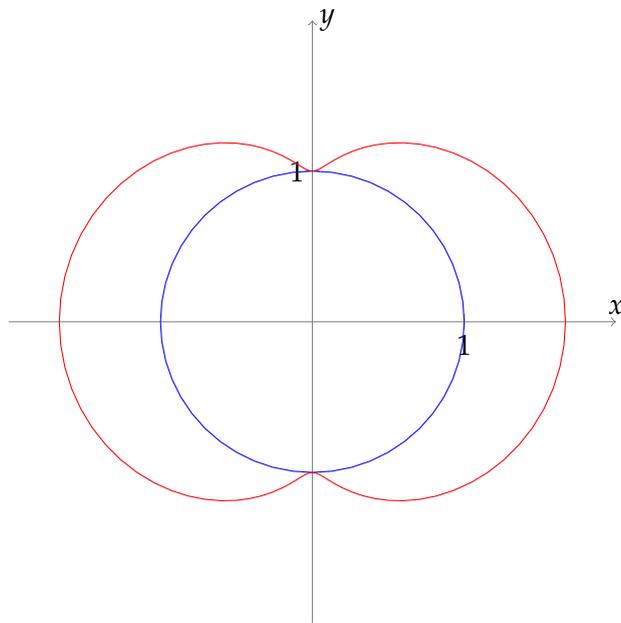
$$\gamma(t) = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(4t) \end{pmatrix}$$



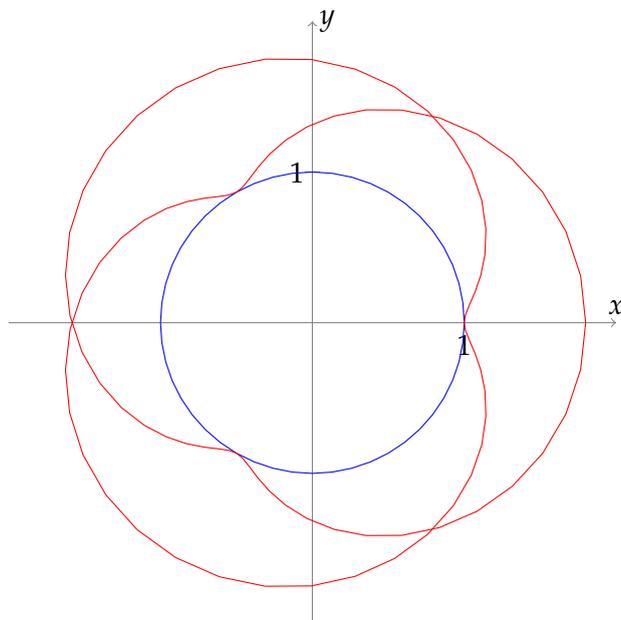
$$\gamma(t) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$



$$\gamma(t) = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$



$$\gamma(t) = \frac{7}{5} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} \cos(5t/2) \\ \sin(5t/2) \end{pmatrix}$$



In jedem dieser Fälle kann γ' Null werden. Welche Konsequenzen kann das haben?

Definition 5.11. Wir nennen

$$v(s) = \gamma'(s)$$

die Geschwindigkeit. Ein stetig differenzierbarer Weg heißt regulär, falls $|\gamma'(s)| \neq 0$ für $a \leq s \leq b$. Für einen regulären Weg ist

$$\vec{t}(s) = |\gamma'(s)|^{-1} \gamma'(s)$$

ein Tangentialvektor. Er hängt nur von der Orientierung aber nicht von der Geschwindigkeit ab. Wir nennen alle Vielfache Tangentialvektor von γ .

Lemma 5.12. Für stetige Vektorfelder und differenzierbare Wege gilt

$$\int_{\gamma} F d\vec{x} = \int_{\gamma} \langle F, \vec{t} \rangle ds$$

Bemerkung: Seien γ_1, γ_2 injektive Wege mit der selben Bahn $(\gamma_1) = (\gamma_2)$ und endlicher Länge. Aus der Definition der Wegintegrale ergibt sich: Für stetigen Integranden gilt

$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds$$

und

$$\int_{\gamma_1} F d\vec{x} = \pm \int_{\gamma_2} F d\vec{x}$$

wobei das Pluszeichen genau dann steht, wenn beide Wege die Bahn in der gleichen Richtung durchlaufen.

6 Die totale Ableitung

Erinnerung: In der Analysis 1 wurde die Ableitung als Limes des Differenzenquotienten

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

definiert. Diese Definition können wir wörtlich auf Abbildungen eines Intervalls nach \mathbb{R}^n übertragen.

Sie haben die *lineare* Approximation als alternative Charakterisierung kennengelernt:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(|h|),$$

genauer: f ist im Punkt x differenzierbar, wenn eine reelle Zahl $f'(x)$ existiert mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - (f(x) + f'(x)h)|}{|h|} = 0.$$

In diesem Kapitel betrachten wir offene Mengen $D \subset \mathbb{R}^n$ und Abbildungen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Definition über den Differenzenquotienten ist auch im Fall \mathbb{R}^n möglich. Etwas allgemeiner betrachten wir die Richtungsableitung

Definition 6.1. Seien D und f wie oben, $v \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$. Wir sagen, die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v existiert falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir den Limes $\partial_v f(x) \in \mathbb{R}^m$.

Ist v der j -te Basisvektor der Standardbasis, so nennen wir die Richtungsableitung partielle Ableitung und schreiben $\partial_j f(x)$.

Diese Begriffe sind wichtig und nützlich. Sie sind jedoch nicht tragfähig als Ableitungsbegriff. Wir werden dies an Beispielen später beleuchten.

Der Zugang über die lineare Approximation führt zu einer ansprechenden Theorie. Wir beobachten zunächst, dass ein Vektor in \mathbb{R}^m als lineare Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^m verstanden werden kann. Zunächst ein Nachtrag zu Matrizen. Seien E und F normierte Vektorräume und $A : E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Die Operatornorm ist definiert als

$$\|A\|_{Op} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F \in [0, \infty]$$

Es folgt

$$\|Ax\|_F \leq \|A\|_{Op} \|x\|_E$$

und die Norm ist die beste Konstante, die in diese Ungleichung eingesetzt werden kann. Genauso folgt

$$\|ABx\| \leq \|A\|_{Op} \|Bx\| \leq \|A\|_{Op} \|B\|_{Op} \|x\|$$

und

$$\|AB\|_{Op} \leq \|A\|_{Op} \|B\|_{Op}.$$

Ist $\|A\|_{Op} < \infty$ so ist A stetig - wir wählen $\delta = \varepsilon / \|A\|_{Op}$. Ist $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}^m$ dann ist die Abbildungsmatrix von A eine $m \times n$ Matrix. Wir identifizieren diese Matrizen oft aber nicht immer mit den linearen Abbildungen.

Die Hilbert-Schmidt-Norm auf Matrizen ist die euklidische Norm in \mathbb{R}^{nm} ,

$$\|(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzungleichung für jedes i gilt

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_j a_{ij} x_j \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \sum x_k^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|A\|_{Op} \leq \|A\|_{HS}.$$

Insbesondere ist die Operatornorm jeder Matrix beschränkt.

Sind A und B Matrizen so gilt

$$\|AB\|_{HS} \leq \|A\|_{HS} \|B\|_{HS}$$

Der Beweis erfolgt wie oben mit $\|A\|_{Op} \leq \|A\|_{HS}$.

Definition 6.2. Seien f und D wie oben. Wir sagen, f ist in x total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(|h|) \quad (|h| \rightarrow 0)$$

d.h.

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - (f(x) + Ah)|}{|h|} = 0.$$

$Df(x) = A$ heißt totale Ableitung von f in x .

Wir können die totale Ableitung genauso für Abbildungen zwischen Banachräumen definieren. Sie heißt dann Fréchetableitung.

- 1) f total differenzierbar in $x \implies f$ ist stetig in x .

2) Genauer: Ist $Df(x)$ die totale Ableitung und $R = \|Df(x)\|_{Op}$, dann gilt

$$(6.1) \quad |f(x+h) - f(x)| \leq (R+1)|h|$$

falls $|h|$ klein genug ist.

3) f total differenzierbar in x , $v \in \mathbb{R}^n \implies$ die Richtungsableitung in Richtung v existiert. Es gilt

$$\partial_v f(x) = Df(x)v.$$

4) f total differenzierbar in $x \implies f$ partiell differenzierbar in x . Es gilt dann

$$\partial_i f(x) = Df(x)e_i$$

Sei $1 \leq j \leq m$. Dann folgt

$$\partial_i f(x)^j = \partial_i f^j(x).$$

5) f linear ($f(x) = Ax$) $\implies f$ ist in \mathbb{R}^n total differenzierbar und $Df(x) = A$.

Beispiele:

1) $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) = x \in \mathbb{R}^n$

2) $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) = |x|^2$

3) A $n \times n$ Matrix,

$$x \mapsto x^T A x$$

4) Wir können $n \times m$ Matrizen als Vektoren in \mathbb{R}^{nm} verstehen. Die euklidische Norm ist dann die Hilbert-Schmidt-Norm der Matrix. Wir betrachten $\text{Mat}(n \times n) \rightarrow \text{Mat}(n \times n)$, $A \rightarrow A^T A$.

5) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}$$

ist stetig in \mathbb{R}^2 . Sie ist überall in alle Richtungen differenzierbar. Es gilt

$$\partial_v f(0,0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

Die rechte Seite ist keine lineare Abbildung in v und daher ist f in Null nicht total differenzierbar.

Lemma 6.3. Seien $Gl(n)$ die invertierbaren $n \times n$ Matrizen. Sie sind eine offene Menge in $Mat\ n \times n$. Die Abbildung $f(A) = A^{-1}$ ist total differenzierbar auf $Gl(n)$ und die totale Ableitung in A ist gegeben durch

$$Df(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1} \text{ f\"ur alle } B \in Gl(n).$$

Beweis. Zun\"achst ist f stetig. Sei A invertierbar, H habe kleine Norm. Wir wollen $A + H$ invertieren, d.h. wir wollen

$$(A + H)x = y$$

f\"ur gegebenen y l\"osen. Wir schreiben

$$x = A^{-1}(y + Hx)$$

und rechnen nach

$$|A^{-1}(y + Hx_2) - A^{-1}(y + Hx_1)| = |A^{-1}H(x_2 - x_1)| \leq \|A^{-1}\|_{Op}\|H\|_{Op}|x_2 - x_1|.$$

Ist $\|A^{-1}\|_{Op}\|H\|_{Op} < 1$ so ist die Abbildung

$$x \mapsto A^{-1}(y + Hx)$$

eine strikte Kontraktion und es existiert genau ein Fixpunkt. Dieser gen\"ugt

$$|x| \leq \|A^{-1}\|\|y\| + \|A^{-1}\|_{Op}\|H\|_{Op}|x|$$

und daher

$$|x| \leq (1 - \|A^{-1}\|_{Op}\|H\|_{Op})^{-1}\|A^{-1}\|\|y\|$$

sowie

$$|((A + H)^{-1} - A^{-1})y| \leq (1 - \|A^{-1}\|_{Op}\|H\|_{Op})^{-1}\|A^{-1}\|_{Op}\|H\|_{Op}|y|$$

Die Differenzierbarkeit folgt aus

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} = (A + H)^{-1}HA^{-1}$$

und

$$(A + H)^{-1} \rightarrow A^{-1}$$

mit $H \rightarrow 0$. □

Lemma 6.4 (Kettenregel). Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$, $g : D \rightarrow V$, g sei total differenzierbar in $x \in D$, f sei total differenzierbar in $g(x) \in V$. Dann ist $f \circ g$ total differenzierbar in x und

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x))Dg(x).$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} f \circ g(x+h) - f \circ g(x) &= Df(g(x))(g(x+h) - g(x)) + o(|g(x+h) - g(x)|) \\ &= Df(g(x))Dg(x)h + o(|h| + |Dg(x)h| + o(|h|)) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} & \frac{|f \circ g(x+h) - (f \circ g(x) + Df(g(x))Dg(x)h)|}{|h|} \\ &= \frac{|f(g(x+h)) - (f(g(x)) - Df(g(x))(g(x+h) - g(x)) + Df(g(x))(g(x+h) - g(x) - Dg(x)h))|}{|h|} \\ &\leq \frac{|f(g(x+h)) - f(g(x)) - Df(g(x))(g(x+h) - g(x))|}{|g(x+h) - g(x)|} \frac{|g(x+h) - g(x)|}{|h|} \\ &\quad + \|Df(g(x))\|_{Op} \frac{|g(x+h) - g(x) - Dg(x)h|}{|h|} \end{aligned}$$

Nach (6.1) folgt $g(x+h) \rightarrow g(x)$ mit $h \rightarrow 0$ und der erste Faktor des ersten Summanden auf der rechten Seite geht gegen Null mit $|h| \rightarrow 0$. Der zweite Faktor des ersten Summanden ist nach (6.1) beschränkt. Der zweite Summand geht nach Definition gegen 0 für $|h| \rightarrow 0$. \square

Definition 6.5. Wir sagen f sei einem Punkt x stetig differenzierbar, wenn f in einem Ball $B_r(x)$ total differenzierbar ist, und die Abbildung auf die totale Ableitung in diesem Punkt stetig ist. Wir sagen f ist stetig differenzierbar, wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist, und die Abbildung auf die totale Ableitung

$$D \ni x \mapsto Df(x) \in \text{Mat}(m \times n)$$

stetig ist.

Nach dem folgenden Satz genügt es die partiellen Ableitungen auf Stetigkeit zu prüfen.

Satz 6.6. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen seien stetig in x_0 . Dann ist f in x_0 total differenzierbar und die Jacobimatrix, die Abbildungsmatrix von $Df(x_0)$ besteht aus den partiellen Ableitungen,

$$(\partial_i f^j(x_0))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

Beweis. Es genügt, $m = 1$ zu betrachten (Warum?). Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a+h) - f(a+h^{(n)}) + f(a+h^{(n)}) - f(a+h^{(n-1)}) + \dots \\ &= \sum \partial_j f(y^{(j)}) h_j \\ &= \sum \partial_j f(x) h_j + \sum (\partial_j f(y^{(j)}) - \partial_j f(x)) h_j \end{aligned}$$

\square

Der Fall $m = 1$ ist von besonderem Interesse. In diesem Fall ist die totale Ableitung, so sie in einem Punkt existiert, eine Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} . Die Jacobimatrix ist ein Zeilenvektor.

7 Stammfunktionen und Gradientenvektorfelder

Auch in mehreren Dimension gibt es eine Variante des Hauptsatzes.

Satz 7.1. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ ein Weg endlicher Länge. Dann gilt

$$\int_{\gamma} (Df)^T d\vec{x} = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für stückweise stetig differenzierbare Wege. Da es wir beide Seite über die Stücke summieren können genügt es stetig differenzierbare Wege zu betrachten. Nach der Kettenregel berechnen wir

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = D(f \circ \gamma)(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle (Df(\gamma(t)))^T, \gamma'(t) \rangle.$$

Der Hauptsatz ergibt

$$\begin{aligned} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) dt \\ &= \int_a^b \langle (Df(\gamma(t)))^T, \gamma'(t) \rangle dt = \int_{\gamma} (Df)^T d\vec{x} \end{aligned}$$

□

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir nennen $(Df)^T$ den Gradienten von f und schreiben ihn als ∇f oder $\text{grad } f$. Er zeigt in die Richtung des steilsten Anstieg, und sein Betrag gibt die Steigung an. Wir nennen ∇f das Gradientenvektorfeld, und f eine Stammfunktion von ∇f . Der Satz besagt dass das Wegintegral über ein Gradientenvektorfeld nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht jedoch von dem Weg. Nicht jedes Vektorfeld ist ein Gradientenvektorfeld.

Beispiele:

1) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|.$

$$(Df)^T(x) = \frac{1}{|x|}x$$

für $x \neq 0$. Sei γ ein Weg von x_0 nach x_1 endlicher Länge, der $x = 0$ nicht trifft. Dann folgt

$$\int_{\gamma} \nabla f d\vec{x} = f(x_1) - f(x_0) = |x_1| - |x_0|$$

2) Sei x_0 der Mittelpunkt der Erde mit Masse m_1 , m_2 die Masse eines Satelliten und g die Gravitationskonstante und $\gamma(t)$ der Weg, auf dem der Satellit ins All geschossen wird. Die Anziehungskraft der Erde auf den Satelliten ist durch das Vektorfeld

$$-gm_1m_2 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3}$$

gegeben, wobei die Entfernung in geeigneten Einheiten gemessen wird. Dann ist

$$F(x) = -gm_1m_2 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3} = (Dh)^T(x)$$

mit

$$h = |x - x_0|^{-1}.$$

Die von der Anziehungskraft der Erde verrichtete Arbeit ist

$$\int_{\gamma} F d\vec{x} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = |\gamma(b)|^{-1} - |\gamma(a)|^{-1}$$

und unabhängig von der Bahn zwischen den Endpunkten.

- 3) In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, 0) : -\infty < t \leq 0\}$ betrachten wir die Funktion f , die den Punkt $(x, y)^T$ dem Winkel zwischen $\{(t, 0) : 0 \leq t\}$ und der Strecke von 0 nach $(x, y)^T$ zuordnet. Dabei wählen wir in der oberen Halbebene den positive und in der unteren Halbebene den negativen Winkel. Es gilt dann für $x \neq 0$

$$\tan f((x, y)^T) = y/x$$

und

$$f(x, y) = \arctan(y/x)$$

für $x > 0$,

$$f(x, y) = \arctan(x/y) + \frac{\pi}{2}$$

Wir berechnen

$$\partial_x \arctan(y/x) = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

und

$$\partial_y \arctan(y/x) = x \frac{1}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Damit ist

$$\int_{\gamma} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} d\vec{x}$$

der Winkel zwischen $\gamma(b)$ und $\gamma(a)$.

Wir suchen nun Kriterien, die es erlauben zu sehen, ob ein Vektorfeld ein Gradientenvektorfeld ist.

Dazu betrachten wir zunächst höhere Ableitungen. Die partiellen Ableitungen $\partial_j f$ sind selbst wieder Abbildungen von D nach \mathbb{R}^m .

Definition 7.2. Sei $m \geq 2$. Wir sagen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist m mal stetig differenzierbar, wenn jede partielle Ableitung $m - 1$ mal stetig differenzierbar ist.

Damit definieren wir den Begriff m mal stetig differenzierbar rekursiv. Der folgende Satz von Schwarz ist von fundamentaler Bedeutung für die höheren partiellen Ableitungen.

Satz 7.3 (Satz von Schwarz). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist für alle Indizes i, j

$$\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f).$$

Wir schreiben

$$\partial_{ij}^2 f$$

für diese zweiten Ableitungen.

Beweis. Es eine Komponente bzw $m = 1$ zu betrachten. Genauso genügt es, $n = 2$ zu betrachten und mit der offensichtlichen Notation

$$\partial_x(\partial_y) f = \partial_y \partial_x f$$

zu zeigen. Sei einen $h, k > 0$. Wir schreiben die Argumente von f als $f(x, y)$. Es gilt offensichtlich

$$I = \frac{\frac{f(x+k, y+h) - f(x, y+h)}{k} - \frac{f(x+k, y) - f(x, y)}{k}}{h} = \frac{\frac{f(x+k, y+h) - f(x+k, y)}{h} - \frac{f(x+k, y) - f(x, y)}{h}}{k}$$

Lassen wir erst k und h gegen Null gehen so konvergiert die linke Seite gegen $\partial_y \partial_x f$, und wenn wir erst h und dann k gegen Null gehen lassen so konvergiert die rechte Seite gegen $\partial_x \partial_y f$. Wir wollen also zeigen, dass wir die Reihenfolge der Limiten vertauschen können. An dieser Stelle kommt die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ins Spiel. Die linke Seite ist nach dem Hauptsatz

$$(hk)^{-1} \int_0^k \partial_x f(x+t, y+h) - \partial_x f(x+t, y) dt$$

Sei $F_t(y) = \partial_x(f(x+t, y+h) - f(x+t, y))$. Dann folgt

$$F_t(y) = \int_0^h \partial_y \partial_x f(x+t, y+s) ds$$

und

$$I = (hk)^{-1} \int_0^k \int_0^h \partial_y \partial_x f(x, y) ds dt + (hk)^{-1} \int_0^k \int_0^h \partial_y \partial_x f(x+t, y+s) - \partial_x \partial_y f(x, y) ds dt.$$

Den ersten Summanden können wir leicht berechnen

$$(hk)^{-1} \int_0^k \int_0^h \partial_y \partial_x f(x, y) ds dt = h^{-1} \int_0^k \partial_y \partial_x f(x, y) dt = \partial_y \partial_x f(x, y).$$

Da die zweiten Ableitungen stetig sind existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|\partial_y \partial_x f(x+t, y+s) - \partial_y \partial_x f(x, y)| \leq \varepsilon$$

für $|t| \leq \delta$ und $|s| \leq \delta$. Für $|h| < \delta$ and $|k| < \delta$ folgt

$$(hk)^{-1} \left| \int_0^k \int_0^h (\partial_y \partial_x f(x+t, y+s) - \partial_y \partial_x f(x, y)) ds dt \right| \leq (hk)^{-1} \int_0^k \int_0^h \varepsilon dt ds \leq \varepsilon.$$

Es folgt

$$|I - \partial_y \partial_x f(x, y)| \leq \varepsilon$$

und genauso auf der rechten Seite

$$|I - \partial_x \partial_y f(x, y)| \leq \varepsilon$$

und damit

$$|\partial_y \partial_x f(x, y) - \partial_x \partial_y f(x, y)| < 2\varepsilon$$

und das für jedes $\varepsilon > 0$. Dann aber müssen beide Ausdrücke gleich sein. □

Satz 7.4. Ein stetig differenzierbares Gradientenvektorfeld F genügt

$$\partial_j F^i = \partial_i F^j$$

Beweis. Sei F ein Gradientenvektorfeld mit Stammfunktion f . Dann ist

$$F^j = \partial_j f$$

Die Aussage folgt mit dem Satz von Schwarz. □

Die Umkehrung gilt nicht unbedingt. Wir können jedoch mit folgendem Verfahren versuchen, eine Stammfunktion zu finden. Wir testen das Vektorfeld auf die Bedingung des Satzes. Ist die Bedingung erfüllt so suchen wir schrittweise eine Stammfunktionen, in dem wir nacheinander über die einzelnen Koordinaten integrieren.

Definition 7.5. Sei E ein Vektorraum. Wir nennen eine Menge $D \subset E$ sternförmig bezüglich x_0 wenn aus $x \in D$ folgt dass die Strecke von x_0 nach x in D liegt.

Jede konvexe Menge ist sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte. Die Umkehrung gilt nicht.

Satz 7.6. Die Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und sternförmig. $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit

$$\partial_i F^j = \partial_j F^i$$

in D für alle i, j . Dann hat F eine Stammfunktion.

Beweis. Wir betrachten zunächst ein Quadrat $[0, 1]^2 \subset D \subset \mathbb{R}^2$. Behauptung: Für x in dem Quadrat gilt

$$\int_0^{x_1} F^1(t, 0) dt + \int_0^{x_2} F^2(x_1, s) ds - \int_0^{x_2} F^2(0, s) ds - \int_0^{x_1} F^1(t, x_2) dt = 0$$

1) Daraus folgt die Aussage des Satzes zunächst in zwei Dimensionen: In jedem Quadrat Q definieren wir eine Stammfunktion f_Q durch die Integration erst in x_1 , und dann x_2 . Aus der obigen Identität folgt

$$\partial_2 f_Q = F^2, \quad \partial_1 f_Q = F^1$$

wenn wir die linke Seite nach x_2 bzw die rechte Seite nach x_1 differenzieren. Ausgehend von einem Punkt setzen wir die Stammfunktionen in Quadraten zusammen. Diesen Teil des Argumentes führen wir nicht vollständig aus.

2) Für beliebige Dimensionen betrachten lassen wir jeweils $n - 2$ Argumente fest und betrachten sie als Parameter. Diesen Teil des Argumentes führen wir nicht aus.

3) Wir rechnen die Behauptung für konstante und für lineare Funktionen nach. Zur Vereinfachung der Notation zeigen wir nur

$$(7.1) \quad \int_0^1 F^1(t, 0) dt + \int_0^1 F^2(1, s) ds - \int_0^1 F^2(0, s) ds - \int_0^1 F^1(t, 1) dt = 0$$

4) Nach Annahme ist $\partial_i F^j$ stetig. $[0, 1]^2$ ist kompakt, also ist F gleichmässig stetig und für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$\|DF(x) - DF(y)\|_{HS} < \varepsilon$$

für $|x - y| < \delta$.

5) In kleinen Quadraten $Q = [x_1, x_1 + s] \times [x_2, x_2 + s]$ der Kantenlänge $s < \delta$ definieren wir

$$g_Q(y) = F(y) - (F(x_1, x_2) + DF(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}).$$

Nach 3) folgt (da die Aussage für konstante und lineare Funktionen stimmt)

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{y_1} F^1(t, x_2) dt + \int_{x_2}^{y_2} F^2(y_1, t) dt - \int_{x_2}^{y_2} F^2(x_1, t) dt - \int_{x_1}^{y_1} F^1(t, y_2) dt \\ &= \int_{x_1}^{y_1} G^1(t, x_2) - G^1(t, y_2) dt + \int_{x_2}^{y_2} G^2(y_1, t) - G^2(x_1, t) dt \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz existiert ein τ zwischen x_2 und y_2 mit

$$G^1(t, x_2) - G^1(t, y_2) = \partial_2 G^1(t, \tau) = \partial_2 F(t, \tau) - \partial_2 F(x_1, y_1)$$

und daher

$$|G^1(t, x_2) - G^1(t, y_2)| \leq \varepsilon s$$

Damit folgt

$$(7.2) \quad |I| \leq 2\varepsilon s^2$$

6) Wir unterteilen das Einheitsquadrat in Quadrate der Kantenlänge $s < \delta$. Wir verändern den Integrationsweg nun rekursiv Quadrat um Quadrat. Die Unterschiede sind jeweils maximal $2\varepsilon s^2$. Es gibt s^{-2} kleine Quadrate. Insgesamt erhalten wir

$$\left| \int_0^1 F^1(t, 0) dt + \int_0^1 F^2(1, t) dt - \int_0^1 F^2(0, t) dt - \int_0^1 F^1(t, 1) dt \right| < 2\varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Daraus folgt (7.1). □

8 Lokale Extrema

Definition 8.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Maximum in $a \in X$, falls $r > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{falls } d(x, a) < r.$$

f besitzt ein lokales Minimum falls $r > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(a) \quad \text{falls } d(x, a) < r.$$

Dann heißt a lokale Maximal- oder Minimalstelle. Die Extremalstelle heißt isoliert, wenn oben für $x \neq a, d(x, a) < r$ die strikte Ungleichung gilt.

Satz 8.2. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in D$ eine lokale Extremalstelle in a . Ist f in a total differenzierbar so folgt $Df(a) = 0$ und $\nabla f(a) = 0$.

Ein Punkt a heißt kritischer Punkt falls $Df(a) = 0$.

Beispiele

- 1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf $K = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$
- 2) $f(x, y) = x^2 - y^2$, K wie oben.
- 3) $f(x, y) = xy$, K wie oben.
- 4) $\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow |x|^2 - |x|^4$

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar so nennen wir die symmetrische Matrix der zweiten Ableitungen Hessematrix,

$$(8.1) \quad Hf(x) = (\partial_{ij}^2 f(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Ist a ein kritischer Punkt und γ ein Weg mit $\gamma(t_0) = a$, so folgt

$$\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t_0) = Df(a)\gamma'(t_0) = 0$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2} f \circ \gamma(t_0) = \frac{d}{dt} Df(\gamma(t))\gamma'(t) \Big|_a = \gamma'(t_0)^T Hf(a)\gamma'(t_0)$$

Definition 8.3. Eine reelle symmetrische $n \times n$ Matrix A heißt positiv semidefinit falls

$$x^T Ax \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und positiv definit falls zusätzlich

$$x^T Ax > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Sie heißt negativ semidefinit falls $-A$ positiv semidefinit, und negativ definit falls $-A$ positiv definit ist. A heißt indefinit, wenn es weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Satz 8.4. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $a \in D$ ein kritischer Punkt und $A = Hf(a)$ die Hessematrix.

- 1) Ist a ein lokales Maximum so ist A negativ semidefinit.
- 2) Ist a ein lokales Minimum so ist A positiv semidefinit.
- 3) Ist A positiv definit so ist a ein isoliertes lokales Minimum.
- 4) Ist A negativ definit so ist a ein isoliertes lokales Maximum.
- 5) Ist A indefinit so ist a kein lokales Extremum.

Beispiele

- 1) $f(x, y) = x^2 - y^4$.
- 2) $f(x, y) = x^2 + y^4$.

Eine Anwendung: Eine Orthonormalbasis für selbstadjungierte (symmetrische) Matrizen.

Satz 8.5. Die reelle (komplexe) Matrix A sei symmetrisch (selbstadjungiert). Dann existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und A ist diagonalisierbar. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis. Wir definieren

$$\phi(x) = x^T A x$$

Diese Funktion ist stetig und beliebig oft stetig differenzierbar. Alle zweiten Ableitungen sind konstant. Wir definieren die $n - 1$ dimensionale Sphäre als Rand des Einheitsballes, $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1(0)$. Als Rand einer Menge ist $\mathbb{S}^{n-1} = \overline{B_1(0)} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)}$ abgeschlossen, da der Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Außerdem ist \mathbb{S}^{n-1} beschränkt, und daher kompakt.

Nach dem Satz vom Maximum nimmt ϕ eingeschränkt auf \mathbb{S}^{n-1} das Maximum in einem Punkt $v_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ an, d.h.

$$\phi(x) \leq \phi(v_1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Damit erhalten wir in \mathbb{R}^n für $x \neq 0$

$$\phi(x) = x^T A x = |x|^2 \left(\frac{x}{|x|} \right)^T A \left(\frac{x}{|x|} \right) \leq |x|^2 \phi(v_1).$$

Wir definieren

$$\lambda_1 = \phi(v_1).$$

Sei $f(x) = \phi(x) - \lambda_1 |x|^2$. Dann ist $f(v_1) = 0$ und $f(x) \leq 0$. f nimmt in v_1 das Maximum an. Die Funktion f ist stetig differenzierbar und daher $Df(v_1) = 0$. Wir berechnen die Ableitung

$$0 = Df(v_1)h = 2h^T(Av_1 - \lambda_1 v_1).$$

Wir wählen für h alle Vektoren einer Basis und sehen dass

$$Av_1 = \lambda_1 v_1.$$

Damit ist v_1 ein normalisierter Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 .

Wir bezeichnen den Untervektorraum der zu v_1 orthogonalen Vektoren mit E_1 und wiederholen das Argument in E_1 . $E_1 \cap \mathbb{S}^{n-1}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und es existiert $v_2 \in E_1$ mit $|v_2| = 1$ und $\phi(x) \leq \phi(v_2) := \lambda_2$ für alle x mit $|x| = 1$ und $\langle x, v_1 \rangle = 0$. Dann nimmt

$$f(x) = \phi(x) - \lambda_2 |x|^2$$

auf E_1 das Maximum 0 in v_2 an. Wir erhalten für $h \in E_1$

$$0 = D_h f(v_2) = 2h^T(Av_2 - \lambda_2 v_2).$$

Außerdem gilt aufgrund der Symmetrie

$$\langle v_1, Av_2 - \lambda_2 v_2 \rangle = \langle Av_1, v_2 \rangle - \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

da die Vektoren orthogonal sind. Wie oben folgt

$$Av_2 = \lambda_2 v_2.$$

Die volle Aussage folgt rekursiv. □

Sei V die Matrix, die Eigenvektoren als Basis hat. Es folgt

$$V^T V = 1_{\mathbb{R}^n}$$

und V^T ist die inverse Matrix. Außerdem gilt

$$V^T A V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} V^T.$$

Satz 8.6. Die symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit wenn alle Eigenwerte > 0 sind und positiv semidefinit wenn alle Eigenwerte ≥ 0 sind.

Eine Anwendung: Bestimmung der Brennpunkte eines Kegelschnittes. Ein Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \langle b, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + c = 0$$

beschrieben. Sei A positiv definit. Dann hat A zwei positive Eigenwerte $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, und zugehörige orthonormalen Eigenvektoren v_1 und v_2 . Nach einer Translation um

$$-\frac{1}{2} A^{-1} b$$

hat die Gleichung die Form

$$(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tilde{c} = 0$$

wobei

$$\tilde{c} = c - \frac{1}{4} b^T A^{-1} b.$$

Wir wechseln die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = sv_1 + tv_2$$

was eine Drehung oder eine Drehspiegelung ist. In diesen Koordinaten gilt

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2$$

und die Gleichung der Ellipse wird

$$\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 + \tilde{c} = 0.$$

Die Lösungsmenge ist leer wenn $\tilde{c} > 0$, sie besteht aus $s = t = 0$ wenn $\tilde{c} = 0$ und sie ist eine Ellipse deren Achsen die Koordinatenachsen sind wenn $\tilde{c} < 0$. Die Längen der Achsen sind $(-\tilde{c}\lambda_1)^{-1/2}$ und $(-\tilde{c}\lambda_2)^{-1/2}$. Die Brennpunkte liegen auf der längeren Achse der Länge $\lambda_2^{-1/2}$ und haben die Koordinaten $(0, \pm t_0)$. Wir testen die Definition der Ellipse an den Punkten der Ellipse auf den Achsen:

$$-\tilde{c}\lambda_2^{-1} = \tilde{c}\lambda_1^{-1} + t_0^2$$

und erhalten

$$t_0 = \sqrt{-\tilde{c}\lambda_2^{-1} - \tilde{c}\lambda_1^{-1}}.$$

In den (x, y) Koordinaten ist der Mittelpunkt $-\frac{1}{2}A^{-1}b$ und die Brennpunkte sind

$$-\frac{1}{2}A^{-1}b \pm \sqrt{\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1}}v_2.$$

Diese Geometrie begründet den Namen Hauptachsentransformation für den Satz 8.5.

8.1 Minimale Abstände

Gegeben seien drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte einer Ebene. Wir suchen einen vierten Punkt, so dass die Summe der Abstände minimal wird.

Lemma 8.7. *Das Minimum wird in genau einem Punkt angenommen. Die Winkel der Strecken von d nach a , b und c haben jeweils einen Winkel von 120 Grad.*

Beweis. Die Punkte seien a , b und c und der gesuchte Punkt d . Wir überzeugen uns dass die Summe der Abstände jedenfalls nicht minimal ist, wenn d mit einem der drei anderen Punkte übereinstimmt. Die Summe der Abstände ist stetig. Die Menge

$$\{d \in \mathbb{R}^2 : |a - d| + |b - d| + |c - d|\} \leq |a - b| + |a - c|\}$$

ist beschränkt und abgeschlossen und daher kompakt. Also wird das Minimum angenommen. Die Funktion

$$f(d) = |a - d| + |b - d| + |c - d|$$

ist außerhalb von a , b und c differenzierbar. Die Gradient ist

$$\frac{d-a}{|d-a|} + \frac{d-b}{|d-b|} + \frac{d-c}{|d-c|} = 0$$

Die Aussage über die Winkel folgt aus der Behauptung:

Die Summe dreier Vektoren der Länge 1 ist genau dann Null, wenn die Winkel 120 Grad betragen:

Je zwei Vektoren haben gleichen Abstand von der durch den dritten Vektor definierten Geraden.

Dann muß der Kosinus des Winkels $-\frac{1}{2}$ sein - und der Winkel $\pm\frac{2\pi}{3}$.

Die Eindeutigkeit folgt aus elementaren geometrischen Überlegungen.

□

Wir betrachten nun das Problem des Abstands von der Kugeloberfläche und Ellipse.

Beispiel: Welcher Punkt auf der S^2 ist am nächsten an $(2, 2, 1)^T$? Welcher ist am weitesten entfernt? Können wir diese Frage als Extremwertaufgabe für Funktionen formulieren?

8.2 Kurven, Flächen und Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt werden wir die Objekte nicht rigoros definieren.

Wir betrachten zunächst Kurven. Der einfachste Fall sind eindimensionale Untervektorräume von \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 . Diese können durch

- 1) die Angabe eines Vektors, der nicht Null ist
- 2) durch $n - 1$ unabhängige lineare Gleichungen im \mathbb{R}^n
- 3) als Graph einer Abbildung von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

gegeben sein.

Allgemeiner wird ein d dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^n durch

- 1) die Angabe von d linear unabhängigen Vektoren
- 2) durch $n - d$ unabhängige lineare Gleichungen im \mathbb{R}^n
- 3) als Graph einer Abbildung von $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$

definiert.

Beispiel Ellipse.

$$(8.2) \quad f(x) = \frac{1}{25}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 = 1$$

Das ist die Beschreibung als Quadrik. Wir stellen fest: $\nabla f(x) \neq 0$ auf der Kurve.

$$(8.3) \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 5 \cos(t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix}$$

Das ist eine Parametrisierung als Bahn eines regulären Weges.

$$(8.4) \quad g(x) := \left| \begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} x_1 + 4 \\ x_2 \end{pmatrix} \right| = 10$$

Das ist die Definition einer Ellipse als alle Punkte, für die die Summe der Abstände zu zwei Punkten eine gegebenen Zahl ist. Wieder gilt $\nabla g(x) \neq 0$ auf der Ellipse.

$$(8.5) \quad x_2 = \pm \sqrt{1 - x_1^2/25}, \quad \text{für } |x_1| \leq 5$$

Das ist die Beschreibung als Graph, was aber nur in zwei Teilen möglich ist.

Sowohl (8.5) und (8.3) eignen sich um Extremwertaufgaben auf Kurven und Flächen in solche auf Teilmengen des \mathbb{R}^n umzuformulieren.

Analog können wir die Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ beschreiben

$$(8.6) \quad f(x) := |x|^2 - 1 = 0$$

$$(8.7) \quad x_3 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad x_1^2 + x_2^2 < 1$$

$$(8.8) \quad x_1 = \sin \theta \cos \phi, x_2 = \sin \theta \sin \phi, x_3 = \cos(\theta), \quad 0 < \theta < \pi$$

Hier entspricht $\theta - \pi/2$ der geographischen Breite und ϕ der geographischen Länge.

Eine Kurve im \mathbb{R}^3 kann durch zwei Gleichungen beschrieben werden.

Wir betrachten jetzt d Gleichungen im \mathbb{R}^n , d.h. eine Abbildung $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Die Abbildung F sei total differenzierbar. Wir nennen Urbilder von Punkten Niveaumengen. Ist γ ein Weg in einer Niveaumenge zum Niveau $y \in \mathbb{R}^d$ so folgt

$$F(\gamma(t)) = y$$

und nach der Kettenregel

$$DF(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

Wir können diese Gleichung lesen als

$$\langle \nabla F^j(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

für alle t im Definitionsbereich und $1 \leq j \leq d$.

Wir interpretieren die Vektoren $\gamma'(t)$ als Tangentenvektoren der Niveaumenge im Punkt $\gamma(t)$ und bezeichnen den von ihnen aufgespannten Teilraum als Tangentialraum der Niveaumenge in diesem Punkt. Dann bietet die Gleichung die Interpretation: Der Gradient der Komponenten von F steht senkrecht auf dem Tangentialraum der Niveaumenge.

Wir betrachten die obige Ellipse

$$f(x) = \frac{1}{25}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 = 1$$

Wir berechnen

$$(8.9) \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{25}x_1 \\ \frac{2}{9}x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -5 \sin(t) & 3 \cos(t) \end{pmatrix}$$

und wir verifizieren die obige Orthogonalität

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{2}{25}5 \cos(t) \\ \frac{2}{9}3 \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \sin(t) & 3 \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Wir suchen nun den zu $(1, 1)^T$ nächsten Punkt auf der Ellipse. Dann muß

$$h(t) = \left| \begin{pmatrix} 5 \cos t - 1 \\ 3 \sin(t) - 1 \end{pmatrix} \right|^2 = 25 \cos^2(t) - 10 \cos(t) + 1 + 9 \sin^2(t) - 6 \sin(t) + 1$$

extremal sein, also $h'(t) = 0$. Das führt auf eine Gleichung vierter Ordnung.

Wir suchen also einen Punkt auf der Ellipse, für den $\nabla|x - (1, 1)^T|^2$ senkrecht auf dem Tangentialraum steht, d.h. der ein Vielfaches von (8.9) ist. Wir suchen also x und $\lambda > 0$ mit

$$f(x) = 0$$

$$\nabla|x - (1, 1)^T| = \lambda \nabla f(x)$$

also

$$\frac{1}{25}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{2}{25}x_1 \\ \frac{2}{9}x_2 \end{pmatrix}$$

Die Zahl λ heißt Lagranger Multiplikator.

Oft interessiert man sich für die Existenz von Minimalstellen von Funktionen auf \mathbb{R}^n .

Satz 8.8. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für alle $C > 0$ sei

$$\{x | f(x) \leq C\}$$

beschränkt. Dann wird das Minimum angenommen.

Wie so oft in der Mathematik ist die Theorie der lokalen und globalen Extremalstellen einerseits wichtig für das strukturelle Verständnis - wann existieren Minimalstellen - und andererseits für die Berechnung - wie finde ich Extremalstellen? Wie finde ich approximative Extremalstellen?

9 Der Satz über inverse Funktionen

Wir betrachten nichtlineare Gleichungssysteme

$$f(x) = y$$

und fragen uns, wann diese Gleichung für gewisse oder alle y lösbar oder eindeutig lösbar ist. Die kurze Antwort ist:

Ist f stetig differenzierbar, und ist $Df(x_0)$ invertierbar, so ist f in einer Umgebung invertierbar.

Definition 9.1. *Es seien D und U in \mathbb{R}^n offene Mengen. Eine k mal stetige bijektive Abbildung $\psi : U \rightarrow D$ heißt C^k Diffeomorphismus, falls auch die Umkehrabbildung k mal stetig differenzierbar ist.*

Satz 9.2 (Satz von der inversen Funktion). *Es sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in D$ und $Df(x_0)$ invertierbar. Dann existieren offenen Mengen $U \subset D$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in U$ und $f(x_0) \in V$ so dass*

$$f|_U : U \rightarrow V$$

bijektiv ist. Außerdem ist die Umkehrabbildung

$$g : V \rightarrow U$$

stetig differenzierbar und es gilt für $y \in V$

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}.$$

Die Abbildung g ist k mal stetig differenzierbar ($k \geq 1$) wenn f k mal stetig differenzierbar ist.

Der zentrale Teil des Beweises ist die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes 3.7, mit dessen Hilfe wir sehen, dass jeder Wert in der Nähe von $f(x_0)$ angenommen wird.

In einer Raumdimension folgt diese Aussage einfacher mit dem Zwischenwertsatz.

Beim Rest des Beweises sind die Unterschiede zwischen einer und mehreren Dimensionen klein.

Die Bedeutung des Satzes liegt darin, dass wir die Umkehrfunktion nicht angeben müssen. In einer Raumdimension kennen wir das Vorgehen: Die Exponentialfunktion kann als Umkehrfunktion des Logarithmus definiert werden, der wiederum die Stammfunktion von $1/x$ ist, die in der Null verschwindet.

Der Sinus kann als Umkehrfunktion des arcsin definiert werden, für den wir wiederum eine Integraldarstellung haben.

Beweis. 1. Schritt: Vereinfachung. Wir definieren

$$\tilde{f}(x) = (Df(x_0))^{-1}(f(x_0 + x) - f(x_0))$$

Damit erreichen wir

$$\tilde{f}(0) = 0, \quad D\tilde{f}(0) = 1_{\mathbb{R}^n}.$$

Wir zeigen die Behauptung für \tilde{f} . Ist \tilde{g} die Umkehrabbildung von \tilde{f} , so ist

$$g(y) = x_0 + \tilde{g}(Df(x_0)^{-1}(y - f(x_0)))$$

die Umkehrabbildung von \tilde{f} .

Es genügt, die Existenz der Umkehrabbildung für \tilde{f} und die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung in 0 mit der Abbildung $1_{\mathbb{R}^n}$ zu zeigen. Daraus folgt die gewünschte Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion in $f(x_0)$, und damit mit dem gleichen Argument in jedem Punkt in einem kleinen Ball um $f(x_0)$.

Die Abbildung

$$y \rightarrow Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$$

ist als Verkettung stetiger Abbildungen

$$y \rightarrow g(y) \rightarrow Df(g(y)) \rightarrow Df(g(y))^{-1}$$

und stetig differenzierbar wenn Df stetig differenzierbar ist als Verkettung stetig differenzierbarer Abbildungen. Rekursiv erhalten wir k mal stetig differenzierbare Abbildungen wenn f k mal stetig differenzierbar ist.

Wir lassen $\tilde{}$ wieder weg und nehmen an:

$$f(0) = 0, Df(x) = 1_{\mathbb{R}^n}$$

Zu zeigen ist die Existenz der Umkehrabbildung und ihre totale Differenzierbarkeit in 0.

Für gegebenes y suchen wir x mit

$$x = J(x) = y - (f(x) - x)$$

Dazu wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

Da f total differenzierbar ist existiert $r_1 > 0$ mit

$$g(x) = |f(x) - Df(0)x| \leq \frac{1}{2}|x|$$

für $|x| \leq r_1$. Da f stetig differenzierbar ist existiert $r' > 0$ mit

$$\|Dg(x)\|_{HS} = \|Df(x) - Df(0)\|_{Op} < \frac{1}{2}$$

für $|x| \leq r_2$. Wir definieren $r = \min\{r, r'\}$, $X = \overline{B_r(0)}$ und für $|y| < r/2$

$$J : X \rightarrow X, J(x) = y - g(x)$$

Da

$$|J(x)| = |y - g(x)| \leq |y| + |g(x)| < \frac{r}{2} + \frac{1}{2}|x| < r$$

für $|x| < r$ bildet J X auf sich ab. Da $\overline{B_r(0)}$ abgeschlossen ist ist X vollständig. Wir zeigen: J ist eine Kontraktion. Dazu betrachten wir x_2 und $x_1 \in X$. Ist $J(x_2) = J(x_1)$ so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall definieren wir

$$w = \frac{J(x_2) - J(x_1)}{|J(x_2) - J(x_1)|}.$$

Der Vektor w hat die Länge 1 und

$$|J(x_2) - J(x_1)| = \langle w, J(x_2) - J(x_1) \rangle$$

Wir definieren

$$h(t) = \langle w, J(x_1 + t(x_2 - x_1)) - J(x_1) \rangle.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |J(x_2) - J(x_1)| &= h(1) - h(0) \\ &= \int_0^1 h'(s) ds \\ &= \int_0^1 \langle w, DJ(x_1 + s(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) \rangle ds \\ &\leq \int_0^1 |w| \|DJ(x_1 + s(x_2 - x_1))\|_{Op} |x_2 - x_1| ds \\ &\leq \frac{1}{2} |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

da für $|x| \leq r$

$$\|DJ(x)\|_{Op} \leq \|Df(x) - 1_{\mathbb{R}^n}\|_{Op} \leq \frac{1}{2}.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt $x \in X$ mit

$$x = J(x) = y - f(x) + x$$

was zu $f(x) = y$ equivalent ist.

Schritt 3: Konstruktion der Umkehrabbildung Sei nun für $i = 1, 2$

$$f(x_i) = y_i$$

Dann folgt

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - J(x_2) + J(x_1)$$

und

$$|x_2 - x_1| \leq |y_2 - y_1| + |J(x_2) - J(x_1)| \leq |y_2 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$$

und daher

$$|x_2 - x_1| \leq 2|y_2 - y_1|$$

Wir definieren die Umkehrabbildung $g : B_{r/2}(0) \rightarrow B_r(0)$. Wir definieren $V = B_{r/2}(0)$ und U als das Bild unter g . Als Urbild von V unter der stetigen Abbildung $f_{B_r(0)}$ ist U offen. Dann ist $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv und g die Umkehrabbildung. Nach der obigen Rechnung gilt

$$|g(y_2) - g(y_1)| \leq 2|y_2 - y_1|.$$

Schritt 4: Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung in 0

Zu zeigen ist also: g ist in Null total differenzierbar und $DG(0) = 1$.

Aus der totalen Differenzierbarkeit folgt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert δ mit

$$|f(x) - x| \leq \varepsilon|x|$$

für $|x| \leq \delta$. Aus $y = f(g(y))$ erhalten wir

$$|y - g(y)| \leq |f(g(y)) - g(y)| \leq \varepsilon|g(y)| \leq 2\varepsilon|y|$$

und damit ist g in Null differenzierbar mit Ableitung $1_{\mathbb{R}^n}$. □

Die Formel für die inverse Abbildung erlaubt die Berechnung höherer Ableitungen. Die Berechnung ist jedoch aufwändig.

Für $n = 1$ erhalten wir

$$g''(t) = -\frac{f''(g(t))}{f'(t)^3}$$

Für allgemeines n ergibt sich die komplizierte Formel

$$\partial_{kl}^2 g_m(y) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m (Df(g(y)))_{i_1 k}^{-1} (Df(g(y)))_{i_2 l}^{-1} (Df(g(y)))_{m i_3}^{-1} \partial_{i_1 i_2 i_3}^2 f_{i_3}(g(y)).$$

Beispiele:

- 1) Die komplexe Exponentialfunktion. Wir teilen sie in Real- und Imaginarteil auf

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = e^{x_1} \begin{pmatrix} \cos(x_2) \\ \sin(x_2) \end{pmatrix}$$

$$Df\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos(x_2) & -e^{x_1} \sin(x_2) \\ e^{x_1} \sin(x_2) & e^{x_1} \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist e^{2x_1} . Sie verschwindet nie. Es gibt eine lokale Umkehrfunktion $g(y_1, y_2)$, der komplexe Logarithmus. Seine Ableitung ist

$$Dg(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} & \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} \\ -\frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} & \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$$

Der Gradient der ersten Komponenten ist

$$\begin{pmatrix} \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} \\ \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$$

mit der Stammfunktion $\ln(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$ und der der zweiten ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-y_2}{y_1^2 + y_2^2} \\ \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}.$$

Hier ist die Stammfunktion der Winkel, der Argument genannt wird, bzw der $\arctan(y_2/y_1)$ für $y_2 > 0$.

2) Polarkoordinaten.

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß wir Flächen und Kurven auf verschiedene Arten beschreiben können. Ist eine Fläche durch eine Gleichung

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

gegeben, so stellt sich die Frage, wann und ob wir nach die Gleichung nach einer der Variablen auflösen können. Unsere bisherige Erfahrung legt nahe, dass wir uns an linearen Gleichungssystemen orientieren, also an

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$$

Diese Gleichung können wir genau dann nach x_3 auflösen wenn $a_3 \neq 0$ ist. In diesem Fall ist

$$x_3 = \frac{1}{a_3}(c - a_1x_1 - a_2x_2).$$

Wir fassen das Problem allgemeiner und teilen die Koordinaten des \mathbb{R}^n in zwei Gruppen auf: Wir setzen $x \in \mathbb{R}^d$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit $d + m = n$ zu einem Vektor in \mathbb{R}^n zusammen. Ein lineares Gleichungssystem der Form

$$Bx + Cy = z$$

ist nach y auflösbar wenn C invertierbar ist. Dann gilt

$$y(x) = C^{-1}(-Bx + z).$$

Wir betrachten eine nichtlineare Version davon. Sei

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung mit $D \subset \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $F(x, y)$ und $DF = (D_xF, D_yF)$ ist eine $m \times n$ Matrix, die wir in Blockgestalt mit einer Matrix D_xF der Dimension $m \times d$ und D_yF der Dimension $m \times m$ schreiben. Wir betrachten einen Punkt $(x_0, y_0) \in D$ mit

$$F(x_0, y_0) = 0$$

und versuchen, die Gleichung für x in einer Umgebung von x_0 nach y aufzulösen als Funktion $y(x)$. Die Erfahrung mit linearen Gleichungen lehrt dass wir die Annahme $D_yF(x_0, y_0)$ invertierbar treffen sollten.

Satz 9.3 (Satz von der impliziten Funktion). *Unter diesen Voraussetzungen existieren*

- 1) *Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $x_0 \in U$ und $y_0 \in V$.*
- 2) *Eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : U \rightarrow V$*

so dass

- $F(x, \psi(x)) = 0$
- $x \in U, y \in V, F(x, y) = 0 \implies y = \psi(x).$

Außerdem gilt

$$D\psi(x) = -(D_y F)^{-1}(x, \psi(x)) D_x F(x, \psi(x)).$$

Ist F k mal stetig differenzierbar, $k \geq 1$, so gilt das auch für ψ .

Beweis. Wir führen die Aussage auf den Satz von der Inversen Funktion zurück und ergänzen F durch das Gleichungssystem

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix} = z \in \mathbb{R}^n$$

In Blockschreibweise ist

$$Df = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{R}^d} & 0 \\ D_x F & D_y F \end{pmatrix}$$

und die Matrix ist genau dann invertierbar wenn $D_y F$ invertierbar ist. Die inverse Matrix ist

$$(Df)^{-1} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{R}^d} & 0 \\ -(D_y F)^{-1} D_x F & (D_y F)^{-1} \end{pmatrix}$$

Wir können also

$$f(x, y) = z$$

für z in einer kleinen Umgebung von $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auflösen. Sei g die Umkehrabbildung des Satzes von der inversen Funktion. Wir schreiben dann

$$\psi(x) = g \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften. Die Ableitung lesen wir aus der Ableitung von g ab.

Mit der Kettenregel gilt

$$0 = D_x F(x, \psi(x)) = (D_x F)(x, \psi(x)) + (D_y F)(x, \psi(x)) D\psi(x)$$

und damit erhalten wir die Formel für die Ableitung.

Die höhere Regularität erhält man rekursiv. □

Beispiele.

Es sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Wir betrachten die Gleichung

$$(9.1) \quad x^T A x = 1$$

Die totale Ableitung der linken Seite ist

$$2x^T A$$

Sie kann nicht verschwinden, da sonst $x^T Ax = 0x = 0$ was der obigen Gleichung widerspricht. Wir betrachten einen Punkt x_0 mit

$$x_0^T Ax_0 = 1$$

und $(2x_0^T A)_n \neq 0$. Dann können wir nach dem Satz über implizite Funktionen (9.1) in einer Umgebung von x_0 nach x_n auflösen und x_n als stetig differenzierbare Funktion der ersten $n - 1$ Variablen schreiben.

Konkret können wir Ellipsen betrachten.

Insbesondere sind die Beschreibungen

- 1) Niveaumenge eine stetig differenzierbaren Abbildung deren Ableitung maximalen Rang hat
- 2) Eine Beschreibung mittels Parametrisierung
- 3) Eine Beschreibung als Graph, wobei die Koordinaten geeignet ausgewählt werden müssen.

alle äquivalent.

10 Der Jordan'sche Kurvensatz.

Wir betrachten einen stetigen injektiven Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h.

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

$$\gamma(s) = \gamma(t) \implies s = t \text{ oder } s, t = a, b$$

Die Bahn von γ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Wir nennen die Bahn eine Jordankurve.

Lemma 10.1. *Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma)$ ist eine Vereinigung von zwei offenen wegzusammenhängenden Mengen. Genau eine davon ist unbeschränkt.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für einen polygonalen Weg, d.h. wir nehmen an es gäbe eine Zerlegung, und die Ableitung von γ ist konstant auf den Intervallen der Zerlegung. Wir definieren

$$X \ni y \rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |x - y|^{-2} \begin{pmatrix} -(x_2 - y_2) \\ (x_1 - y_1) \end{pmatrix} d\vec{x}$$

Es gilt:

- 1) Aus $(\gamma) \subset B_R(0)$ folgt $f(x) = 0$ für $|x| \geq R$. Das folgt aus der Existenz der Stammfunktion in der geschlitzten Ebene, nach einer Translation um y .
- 2) Für jedes $y \in X$ existiert ein $r > 0$ mit $f|_{B_r(y)}$ konstant. Dazu betrachten wir ein einzelnes Segment des Weges, das wir verschieben.
- 3) Die Funktion f ist auf jeder Strecke konstant, die (γ) nicht trifft,
- 4) Sei $X_\varepsilon = \{y \in X : \text{Es existiert } x \in (\gamma) \text{ mit } |x - y| < \varepsilon\}$. Ist ε klein so zerfällt X_ε in jedem Ball in zwei Teile, je auf einer Seite des Polygons
- 5) Liegen y_1 und y_2 auf verschiedenen Seiten, so folgt $|f(y_1) - f(y_2)| = 1$.

Sei $x_0 \in (\gamma)$ und y_1 und y_2 in einem kleinen Ball um x_0 mit $|f(y_1) - f(y_2)| = 1$. Sei $y \in X$. Wir verbinden y und x_0 mit einem Weg, der zu einem Zeitpunkt das erste Mal auf (γ) trifft. Wir wählen einen Punkt in X_ε davor. Von diesem Punkt auf folgen wir γ , bis wir y_1 oder y_2 treffen. Es folgt $f(y) = f(y_1)$ oder $f(y) = f(y_2)$. Also nimmt f nur zwei Werte an: 0 und 1 oder -1.

Die übrigen Aussagen folgen schnell für den polygonalen Weg.

Wir skizzieren die Argumente für stetige Wege, ohne sie auszuführen. Sei jetzt γ ein stetiger geschlossener Weg und $y \in X$ mit $B_r(y) \cap (\gamma) = \{\}$. Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < b$ eine Zerlegung so dass die Bahn $(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$ in einem Ball vom Radius $r/2$ liegt. Sei $\gamma_{(t_i)}$ der entsprechende polygonale Weg. Wir definieren $f(y)$ durch diesen polygonalen Weg. Verfeinerungen ändern den Wert nicht. Also ist f wohldefiniert.

Die polygonalen Approximationen sind im Allgemeinen nicht injektiv. Bei Überschneidungen lassen wir jeweils Schleifen weg.

□

Wir betrachten eine Anwendung: Sei $(\gamma) = \partial D$ ein zweimal stetig differenzierbarer regulärer Jordanweg, D offen und beschränkt, U eine offene Menge, die \overline{D} enthält, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit

- 1) $\nabla f \neq 0$ on ∂D
- 2) $\nabla f(x) = 0 \implies Hf(x)$ ist invertierbar.

Wir nennen kritische Punkte, die keine lokalen Extrema sind, Sattelpunkte.

Dann ist die Zahl der lokalen Maxima minus die Zahl der Sattelpunkt plus die Zahl der Minima 1.

Wir für den Beweis nach der Zahl der kritischen Punkt.

Die Höhenlinien von Höhen, die keine Werten kritischer Punkte sind, sind Vereinigungen von Jordankurven.

Wir betrachten die äußere Höhenlinie. Bis wir entweder eine Maximalstelle oder einen Sattel erreichen ändert sich nicht. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder zerfällt unsere Menge oberhalb des Sattelpunktes in zwei Teile. Dabei verlieren wir einen Sattelpunkt und gewinnen eine Komponente. Aufgrund der Induktionsannahme kennen wir die Aussage für beide Komponenten. Daraus folgt die Aussage in diesem Fall.

Im zweiten Fall gibt es unter dem Sattel eine innere geschlossene Niveaulinie. Über dem Sattel gibt es wieder nur eine Komponente.

Beim Übergang verlieren wir einen Sattel und eine Komponente, und die Aussage folgt wieder aus der Induktionsannahme.

Dieser Beweis ist nicht ganz rigoros: Wir verwenden Aussagen über das Verhalten von Niveaulinien. Dieses folgt aus dem Satz über implizite Funktionen solange wir uns von kritischen Punkten entfernt halten. Beim Sattelpunkt benötigt man das sogenannte Morselemma, das das Verhalten der Höhenlinien in eine Umgebung des Sattels klärt.

11 Differentialgleichungen

11.1 Wachstumsprozesse

Wir betrachten Funktionen x von t und bezeichnen die Ableitung bezüglich t mit \dot{x} . Eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = a(t)x$$

beschreibt einen Wachstumsprozess: Die Änderungsrate von x ist proportional zu einer gegebenen Funktion $a(t)$. Wir betrachten diese Gleichung auf einem Intervall (c, d) und suchen eine Lösung, die zu einer Zeit $t_0 \in (c, d)$ einen gegebenen Wert x_0 annimmt.

Beispiele sind:

- 1) Zerfallsraten radioaktiver Substanzen, für die a nicht von t abhängt.
- 2) Wachstumsraten von Populationen, solange es keine begrenzenden Faktoren gibt
- 3) Kontinuierliche Zinsrechnung.
- 4) Die Exponentialfunktion $x(t) = e^t$ genügt einer Gleichung dieser Form.

Sei $x(t)$ eine stetige differenzierbare Funktion, die der Gleichung genügt. Dann ist - falls $x(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt} \ln |x(t)| = \frac{\dot{x}}{x} = a(t)$$

und daher

$$\ln |x(t)| - \ln |x_0| = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

also

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} x_0.$$

Umgekehrt definiert diese Formel eine Lösung, die also auch eindeutig ist.

Im Fall einer Grenzpopulation betrachtet man auch

$$\dot{x} = b(g - x)x$$

mit $b, g > 0$. Es gibt die uninteressante Lösung $x = 0$. Die Grenzpopulation g wird nicht überschritten wenn wir unterhalb starten. Wir betrachten $x > 0$ und definieren $y = x^{-1}$. Es gilt

$$\dot{y} = -x^{-2} \dot{x} = -x^{-2}(bgx - bx^2) = -bgy + b$$

Der Lösung $x = g$ entspricht $y = 1/g$. Wir definieren $z = \frac{1}{g} - y <$ und berechnen

$$\dot{z} = -\dot{y} = bgy - b = bgz.$$

Wir erhalten

$$z(t) = e^{bgt} z(t_0)$$

und jede Lösung führt auf ein derartiges z . Es folgen

$$z_0 = \frac{1}{g} - \frac{1}{x_0}$$

und

$$x(t) = \left(\frac{1}{g} - e^{bgt} \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{x_0} \right) \right)^{-1}.$$

Wir suchen nun die allgemeiner Lösung der allgemeine inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

Sind x_i , $i = 1, 2$ Lösungen, so genügt $y = x_2 - x_1$ der Gleichung

$$\dot{y} = a(t)y$$

Wir stellen fest: Zwei Lösungen der inhomogenen Lösungen unterscheiden sich um eine Lösung der homogenen Gleichung. Umgekehrt, ist x eine Lösung der inhomogenen Gleichung, und y eine Lösung der homogenen Gleichung, dann ist $x + y$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Wir erhalten durch den Ansatz sogenannten Variation der Konstanten die Lösung der inhomogenen Gleichung mit $x(t_0) = t_0$:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma) d\sigma} b(s) ds.$$

Eine direkte Rechnung zeigt dass wir so die Lösung der Differentialgleichung mit dem gewünschten Anfangswert erhalten.

Wir können die Exponentialfunktion als eindeutige Lösung einer Differentialgleichung charakterisieren: Die Exponentialfunktion ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = x$$

mit $x(0) = 1$.

Wir betrachten zwei Approximationen für diese Gleichung.

1) Ein Fixpunktiteration. Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung genügt jede Lösung der Differentialgleichung mit $x(0) = 1$ der Integralgleichung

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s) ds.$$

Wir betrachten die Abbildung, die \tilde{x}

$$x(t) = 1 + \int_0^t \tilde{x}(s) ds$$

abbildet. Ausgehend von $\tilde{x} = 0$ erhalten wir

$$x^0(t) = x(t) = 1 + \int_0^t \tilde{x}(s) ds = 1,$$

ausgehend von $\tilde{x} = x^0$

$$x^1(t) = x(t) = 1 + \int_0^t \tilde{x}(s) ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t,$$

ausgehend von $\tilde{x} = x^1$

$$x^2(t) = x(t) = 1 + \int_0^t \tilde{x}(s) ds = 1 + \int_0^t 1 + s ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2.$$

Rekursiv ergibt sich

$$x^j(t) = \sum_{m=0}^j \frac{t^m}{m!}.$$

Diese Reihe konvergiert gegen die Exponentialfunktion.

2) Ein Eulerverfahren. Sei $t > 0$, M eine ganze Zahl $\delta = t/M$ und $t_j = j\delta$. Ist δ klein, so können wir im Folgenden das Integral ersetzen und machen dabei nur einen kleinen Fehler:

$$x(t_{j+1}) = x(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} x(s) ds \sim \delta x(t_j)$$

Wir betrachten das Rekursionsverfahren

$$x_{j+1} = x_j + \delta x_j$$

mit $x_0 = 1$. Es folgt mit Information aus Analysis

$$x_M = \left(1 + \frac{t}{M}\right)^M \rightarrow e^t.$$

In etwas anderer Gestalt ist dieser Grenzübergang Schulinhalt: Der Wert des Kapitals bei der Zinseszinsrechnung konvergiert beim Übergang zu kleinen Zeitabständen gegen eine Exponentialfunktion.

12 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Einige Beobachtungen können auf allgemeinere Differentialgleichungen übertragen werden. Es sei $A(t)$ eine $n \times n$ Matrix, und $b(t)$ ein Vektor im \mathbb{R}^n , die beide stetig von t abhängen.

Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

wird inhomogene lineare Differentialgleichung genannt. Ist $b = 0$ so nennen wir die Gleichung homogen. Sei zunächst $b = 0$ und A unabhängig von t . Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ suchen wir eine Lösung mit Hilfe des Iterationsverfahrens aus dem letzten Abschnitt. Wir erhalten wieder

$$x^j = \sum_{m=0}^j \frac{1}{m!} t^m A^m x_0.$$

und definieren

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j.$$

Lemma 12.1. *Die Reihe*

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} A^j$$

konvergiert für all $n \times n$ Matrizen.

Beweis. Mit

$$\|AB\|_{Op} \leq \|A\|_{Op} \|B\|_{Op}$$

erhalten wir

$$\|A^j\|_{Op} = \|AA^{j-1}\|_{Op} \leq \|A\|_{Op} \|A^{j-1}\|_{Op}.$$

Mit vollständiger Induktion ergibt das

$$\|A^j\|_{Op} \leq \|A\|_{Op}^j.$$

Wir benötigen die Abschätzung

$$(12.1) \quad \left(\frac{j}{3}\right)^j \leq j! \leq \left(\frac{j}{2}\right)^j$$

aus der Analysis 1 für $j \geq 4$. Wir berechnen für $N > M > 3\|A\|_{Op}$

$$(12.2) \quad \begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} A^j - \sum_{j=0}^M \frac{1}{j!} A^j \right\|_{Op} &= \left\| \sum_{j=M+1}^N \frac{1}{j!} A^j \right\|_{Op} \\ &\leq \sum_{j=M+1}^N \frac{1}{j!} \|A^j\|_{Op} \\ &\leq \sum_{j=M+1}^N \frac{1}{j!} \|A\|_{Op}^j \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \left(\frac{3\|A\|_{Op}}{M}\right)^j \\ &= \left(\frac{3\|A\|_{Op}}{M}\right)^M \frac{M}{M - 3\|A\|_{Op}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{as } M \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Daher sind die Partialsummen eine Cauchyfolge und konvergiert. □

Wir betrachten Beispiele.

$$(12.3) \quad e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$(12.4) \quad e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(12.5) \quad e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(12.6) \quad e^{\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(12.7) \quad e^{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$\begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \neq e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(12.8) \quad e^{V^{-1}AV} = V^{-1}e^AV$$

Lemma 12.2. Seien A und B Matrizen mit

$$AB = BA$$

Dann folgt

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

Beweis. Wir entwickeln beide Seiten:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A+B)^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \frac{1}{j!} \binom{j}{l} A^l B^{j-l} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} A^l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \frac{1}{l!} \frac{1}{(j-l)!} A^l B^{j-l} \end{aligned}$$

Die Aussage folgt mit

$$\binom{j}{l} = \frac{j!}{l!(j-l)!}$$

und Koeffizientenvergleich. □

Lemma 12.3. Es gilt

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$$

Beweis. Da

$$e^{(t+h)A} = e^{tA} e^{hA}$$

genügt es, die Ableitung

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tA} \right|_{t=0} = A$$

zu berechnen. Dieses wiederum folgt aus

$$t^{-1} \|e^{tA} - (1 + tA)\|_{O_p} \rightarrow 0 \quad \text{mit } t \rightarrow 0$$

Nun gilt

$$e^{tA} - (1 + tA) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$$

und wie bei (12.2)

$$\|e^{tA} - (1 + tA)\|_{O_p} \leq \left(\frac{3}{2}t\|A\|_{O_p}\right)^2 \frac{2}{2 - 3t\|A\|_{O_p}}$$

falls $t\|A\|_{O_p} < 2$. Daraus folgt die Differenzierbarkeit. □

Wir erhalten eine Lösung des Anfangswertproblems mit

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Diese Lösung ist eindeutig.

Lemma 12.4. *Für jede Lösung von*

$$\dot{x} = A(t)x$$

gilt

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| e^{\left| \int_{t_0}^t \|A(s)\|_{O_p} ds \right|}.$$

Insbesondere gibt es nur die triviale Lösung zu dem Anfangswert $x(t_0) = 0$.

Beweis. Sei

$$h(t) = \int_{t_0}^t \|A(s)\|_{O_p} ds.$$

Die Aussage folgt aus

$$\frac{d}{dt} e^{-2h(t)} |x(t)|^2 \leq 2e^{-2h(t)} (\|A(t)\|_{O_p} - h') |x|^2 = 0$$

in dem betrachteten Intervall. Daher fällt

$$e^{h(t)} |x(t)|$$

monoton. □

Der Raum der Lösungen hat also höchstens die Dimension n . Aus Satz 3.8 ergibt sich die Existenz von Lösungen zu gegebenen Anfangswerten.

Satz 12.5. *Der Raum der Lösungen von*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = 0$$

hat die Dimension n .

Lemma 12.6. *Die Lösung x zu*

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

ist

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Beweis. Der Beweis aus dem letzten Abschnitt überträgt sich. Hier wollen wir anders argumentieren. Sei

$$y(t) = e^{-tA}x(t)$$

Dann folgt

$$\dot{y} = -Ay + e^{-tA}(Ax + b(t)) = e^{-tA}b(t)$$

und

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds.$$

Wir wenden e^{tA} an auf beide Seiten. □

13 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

In diesem Abschnitt geht es um einen Schritt zur Beschreibung und oft zur Berechnung von Lösungen. Im Allgemeinen kann man Lösungen von Differentialgleichungen nicht explizit angeben. Bei der hier betrachteten Klasse lassen sich Lösungen durch Integral und Umkehrabbildungen beschreiben. Weder lassen sich Integrale im Allgemeinen explizit angeben, noch gilt das für Umkehrfunktionen.

Wir betrachten Systeme von Differentialgleichungen der Gestalt

$$(13.1) \quad \dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

wobei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in D$, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist.

Gesucht ist eine Lösung, d.h. ein offenes Intervall (a, b) das t_0 enthält, eine stetig differenzierbare Abbildung $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ deren Graph in D liegt, und die dem Anfangswertproblem genügt.

In diesem Kapitel betrachten wir den Fall $n = 1$.

Differentialgleichungen der Gestalt

$$(13.2) \quad \dot{x} = f(t)g(x)$$

mit stetigen Funktionen f und g werden als Differentialgleichung mit getrennten Variablen bezeichnet.

Ist $g(x_0) = 0$ so ist $x(t) = x_0$ eine Lösung. Sei $g(x) \neq 0$ und G eine Stammfunktion von $1/g$. Ist x eine Lösung der Differentialgleichung (13.2) so gilt

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) = G'(x(t))\dot{x}(t) = \frac{1}{g(x(t))}g(x(t))f(t) = f(t)$$

und daher ist dann

$$G \circ x$$

eine Stammfunktion von f . Umgekehrt: Ist F eine Stammfunktion von f , und H eine Umkehrfunktion von G , so ist

$$(13.3) \quad x(t) = H(F(t))$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Wir berechnen

$$\dot{x} = H'(F(t))F'(t) = \frac{1}{G'(H(F(t)))}f(t) = g(x(t))f(t).$$

Die Stammfunktionen sind nicht eindeutig. Durch die Wahl der Stammfunktionen können wir das Anfangswertproblem lösen: Die Wahl $F(t_0) = 0$ und $G(x_0) = 0$ stellt $x(t_0) = x_0$ sicher.

Offensichtlich hat jede Lösung diese Gestalt - falls $g(x)$ nicht Null ist.

Satz 13.1. *Es seien I und J offene Intervalle, f eine stetige Funktion auf I und g eine stetige Funktion auf J ohne Nullstelle. Zu $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$ gibt es ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ mit $t_0 \in I_0$ so dass das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(t)g(x), x(t_0) = x_0$$

genau eine Lösung $x(t)$ besitzt, die durch (13.3) gegeben ist.

Beispiele:

$$(13.4) \quad \dot{x} = -t/x$$

Hier ist $g(x) = 1/x$, $G(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$ ist eine Stammfunktion von $1/g$. $F(t) = -\frac{1}{2}t^2$ ist eine Stammfunktion von f und

$$H(y) = x_0^2 + 2y$$

Also ist

$$x(t) = \pm \sqrt{x_0^2 - t^2}$$

eine Lösung auf $|t| < |x_0|$. Der Graph der Lösung ist die obere oder die untere Hälfte der Kreises mit Radius $|x_0|$.

$$(13.5) \quad \dot{x} = \sqrt{|x|}$$

Hier ist $x = 0$ eine Lösung. Wir erhalten $F(t) = t + C$, $G(x) = 2 \pm \sqrt{x}$ und $H(y) = \frac{1}{4}y^2$. Wir erhalten die Lösungen

$$x(t) = \frac{1}{4}(t + C)^2 \quad \text{für } t > -C$$

und

$$x(t) = -\frac{1}{4}(t + C)^2 \quad \text{für } t < -C$$

Für $a < b$ ist

$$(13.6) \quad x(t) = \begin{cases} -(t-a)^2/4 & t < a \\ 0 & a \leq t \leq b \\ (t-b)^2/4 & t > b \end{cases}$$

eine Lösung. Insbesondere ist die Lösung des Anfangswertproblems nicht eindeutig. Wir werden vor allem Differentialgleichungen betrachten, für die das Anfangswertproblem genau eine Lösung zulässt.

Im Unterschied zur Situation hier wird f stetig differenzierbar sein. Auch der Satz liefert keine Eindeutigkeit da $g(0) = 0$ dort ausgeschlossen ist.

$$(13.7) \quad \dot{x} = e^{-x} \sin t$$

Hier ist $F(t) = \cos(t) - 1$, $G(x) = e^{-x_0} - e^{-x}$ und $H(y) = -\ln(e^{-x_0} - y)$ für $y < e^{-x_0}$.

$$x(t) = -\ln(\cos t + e^{-x_0} - 1).$$

Existenzintervall und Struktur der Lösung hängen stark von dem Anfangswert x_0 ab. Ist $x_0 < -\ln 2$ so existiert die Lösung auf ganz \mathbb{R} und ist 2π periodisch.

$$(13.8) \quad \dot{x} = x^2 t + t, \quad x(t_0) = x_0$$

Hier ist $g(x) = x^2 + 1$, $f(t) = t$, $F(t) = \frac{1}{2}(t^2 - c^2)$, $G(x) = \arctan(x)$, $H(y) = \tan(y)$ und

$$x(t) = \tan\left(\frac{1}{2}(t^2 - c^2)\right)$$

wobei

$$|t^2 - t_0^2| < \pi$$

sein muß und c so gewählt werden muß dass

$$x_0 = \tan\left(\frac{1}{2}(t_0^2 - c^2)\right)$$

bzw

$$c = \sqrt{t_0^2 - 2 \arctan x_0 + k\pi}$$

für ein geeignetes k .

14 Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir betrachten zunächst lineare Systeme.

Satz 14.1. *Es sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ erlaubt sind. Es sei $T \ni t \rightarrow A(t)$ eine stetige Abbildung des Intervalls in die $n \times n$ Matrizen, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 \in (a, b)$. Dann existiert genau eine stetig differenzierbare Abbildung $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

Daraus folgt dass der Raum der Lösungen die Dimension n hat.

Beweis. Wir suchen die Lösung als Fixpunkt der Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds.$$

die komponentenweise zu verstehen ist und definieren

$$h(t) = 2 \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\|_{O_p} ds \right|.$$

Statt $x(t)$ suchen wir $y(t) = e^{-h(t)}x(t)$. Diese Funktion genügt

$$y(t) = e^{-h(t)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-h(t)+h(s)}A(s)y(s)ds$$

Wir definieren

$$J(y)(t) = e^{-h(t)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-h(t)+h(s)}A(s)y(s)ds$$

und zeigen dass J eine Kontraktion auf $C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm ist. Der Fixpunkt definiert dann eine Lösung der Integralgleichung für x , die dann nach dem Hauptsatz der Differentialgleichung genügt.

Da J linear in y ist genügt es, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t e^{-h(t)+h(s)}A(s)y(s)ds \right| &\leq \left| \int_{t_0}^t e^{-h(t)+h(s)}\|A(s)\|_{Op}ds \right| \|y\|_{sup} \\ &\leq e^{-h(t)} \left| \int_{t_0}^t e^{h(s)}\frac{1}{2}h'(s)ds \right| \|y\|_{sup} \\ &\leq \frac{1}{2}\|y\|_{sup} \end{aligned}$$

zu zeigen. Die erste Ungleichung folgt wie beim Satz über Inverse Abbildungen: Wir betrachten das Skalarprodukt beider Seiten mit einem geeigneten Vektor der Länge 1. □

Satz 14.2. *Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei stetig differenzierbar, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t_0, x_0) \in D$. Dann existiert ein Intervall $(a, b) \ni t_0$ und genau eine Abbildung $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\text{graph}(x) \subset D$,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

und $x(t_0) = x_0$

Beweis. Nach Verkleinerung von D und Translation in Ort und Zeit dürfen wir annehmen, dass D die Gestalt

$$(-2T, 2T) \times B_{2R}(0)$$

hat. Die Abbildungen

$$(t, x) \rightarrow \|D_x f(t, x)\|_{Op}$$

und f sind stetig und $[-T, T] \times \overline{B_R(0)}$ ist kompakt. Daher existiert eine Konstante C mit

$$|f(t, x)| \leq C \quad \|D_x f(t, x)\|_{Op} \leq C.$$

Wir dürfen annehmen dass $D = (-T, T) \times B_R(0)$, $x_0 = 0$, $t_0 = 0$,

$$|f(t, x)| \leq C, \quad \|D_x f(t, x)\|_{Op} \leq C$$

in D . Ohne Einschränkung sei $T \leq \frac{R}{2C}$ - sonst verkleinern wir T .

Aus

$$\|D_x f(t, x)\|_{Op}$$

folgt

$$(14.1) \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq C|x - y|$$

für $|t| \leq T$, $x, y \in B_R(0)$. Wir suchen die Lösung als Fixpunkt der Abbildung $J : \overline{B_R^{C_b}(0)} \rightarrow \overline{B_R^{C_b}(0)}$ wobei $B_R^{C_b}(0)$ den Ball mit Radius R und Mittelpunkt 0 im Banachraum der stetigen Abbildungen von $(-T, T)$ nach \mathbb{R}^n mit der Supremumsnorm bezeichnet. Der abgeschlossene Ball ist ein vollständiger metrischer Raum. $J(y)$ ist durch

$$[J(x)(t)]_j = \int f_j(y(s)) ds$$

definiert. Es gilt

$$\|J(y)\|_{sup} \leq R/2$$

und

$$\|J(y^2) - J(y^1)\|_{sup} \leq \frac{1}{2}\|y^2 - y^1\|_{sup}.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt x . Er genügt

$$x_j(t) = \int_0^t f_j(x(s)) ds$$

und damit

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x(t)), \quad x(0) = 0.$$

□

Beispiele:

$$x'_1 = -\beta_1 x_1, \quad x'_2 = -\beta_2 x_2 + \gamma_1 x_1, \quad x'_3 = \gamma_2 x_2$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -\beta_2 & 0 \\ 0, \gamma_2 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = x^2$$

15 Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die Differentialgleichung der Ordnung m

$$(15.1) \quad x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)})$$

mit den Anfangswerten

$$x(t_0) = y_0, x'(t_0) = y_1 \dots x^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}$$

wobei f , t_0 und y_j für $0 \leq j \leq m-1$ gegeben sind.

Wir schreiben

$$x_j(t) = x^{(j)}(t)$$

und erhalten das äquivalente System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ f(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \end{pmatrix} \quad \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

Genauso können wir die lineare Differentialgleichung

$$(15.2) \quad x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \dots + a_0(t) = b(t)$$

mit gegebenen Funktionen a_j und b als System erster Ordnung schreiben:

$$x_0 = x \quad x_j = x^{(j)} \quad \text{für } 1 \leq j < m$$

Es folgt für $j < m-1$

$$\dot{x}_j = x_{j+1}$$

und

$$\dot{x}_m = -a_{m-1}x_{m-1} - a_{m-2}x_{m-2} \dots - a_0x_0 + b$$

als

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

Wir erhalten wieder:

- 1) Die Lösungen der homogenen Gleichung bilden einen Vektorraum der Dimension n .
- 2) Die Differenz zweier Lösungen genügt der homogenen Gleichung. Die Summe einer Lösung der inhomogenen Gleichung und einer Lösung der homogenen Gleichung genügt der inhomogenen Gleichung.

Wir betrachten nun den Fall, dass alle Koeffizienten a_j konstant sind. Dann ist die allgemeine Lösung über die Matrixexponentialfunktion gegeben. Wir kommen aber einfacher ans Ziel. Wir definieren das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Ist $p(\lambda) = 0$ so erfüllt $e^{\lambda t}$ die Differentialgleichung - unabhängig davon ob λ reell oder komplex ist. Mehrfache Nullstellen müssen getrennt betrachtet werden:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$$

entspricht

$$x^{(2)} - 2\lambda_0\dot{x} + \lambda_0^2x = 0$$

Lösungen sind $e^{\lambda_0 t}$ und $t e^{\lambda_0 t}$. Bei Nullstellen höherer Ordnung bekommen wir weitere Potenzen von t .

Satz 15.1. *Der Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = 0$$

hat die Dimension n . Das Polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

habe die Nullstellen $\lambda_1 \dots \lambda_m$ mit Vielfachheit d_j . Dann ist eine Basis des Lösungsraums durch

$$\{t^l e^{\lambda_j t} : 1 \leq j \leq m, 0 \leq l < d_j\}$$

gegeben.

Bemerkung: Hier erlauben wir komplexwertige Lösungen. Ist λ_j eine nicht reale Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so gilt das auch für die komplex konjugierte komplexe Zahl $\bar{\lambda}_j$, da die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms reell sind. In diesem Fall sind

$$\text{real}(t^i e^{t\lambda_j}) = \frac{1}{2}(t^i (e^{t\lambda_j} + e^{t\bar{\lambda}_j})) = t^i e^{t \text{real } \lambda_j} \cos(t \text{ im } \lambda_j)$$

und der Imaginärteil reelle Lösungen.

Beispiele:

$$x' = -x$$

(Radioaktiver Zerfall, eine Substanz)

Das ideale Pendel

$$x'' = -x$$

Das gedämpfte Pendel

$$x'' + 2x' + 2x = 0$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

Die Funktionen

$$e^{-(1+i)t}, e^{-(1-i)t}$$

sind eine Basis des Lösungsraumes auf.

Wir schreiben

$$x_1 = x, x_2 = x' + x,$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x'' + x' = -2x' - 2x + x_2 - x_1 = -x_2 - x_1$$

also

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$x''' = 0$$

Die Matrix ist die Summe von $-1_{\mathbb{R}^2}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ also

$$e^{t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Das reale Pendel - hier ist α der Winkel der Auslenkung - wird durch

$$\alpha^{(2)} = -\sin(\alpha)$$

modelliert.

Dann ist

$$\frac{1}{2} |\dot{\alpha}|^2 - \cos(\alpha)$$

konstant. Wir schreiben $x_1 = \alpha$ und $x_2 = \dot{\alpha}$ und erhalten das System

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -\sin(x_1)$$

Lösungen bewegen sich auf den Niveaumengen von

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 - \cos(x_1)$$

da

$$\frac{d}{dt} f(x_1, x_2) = x_2 \dot{x}_2 + \sin(x_1) \dot{x}_1 = x_2 (\dot{x}_2 + \sin(x_1)) = 0$$

16 Das Eulersche Polygonzugverfahren

Wir betrachten ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(0) = x_0$$

Für $\delta > 0$ approximieren wir die Lösungen an den Zeitpunkten $t_j = j\delta$ durch x_j :

$$x_{j+1} = x_j + f(j\delta, x_j)\delta$$

Wir definieren

$$x^\delta(t) = x_j + \delta^{-1}(t - j\delta)(x_{j+1} - x_j)$$

für $j\delta \leq t < (j+1)\delta$.

Satz 16.1. *Es sei f beschränkt und stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung und $T > 0$. Dann existiert eine Konstante c mit*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x^\delta(t) - x(t)| \leq c\delta.$$

Beweisskizze. Wir setzen x^δ in die Differentialgleichung ein:

$$\frac{d}{dt}x^\delta - f(t, x^\delta) = f(j\delta, x_j) - f(t, x^\delta)$$

und mit $y = x^\delta - x$

$$\frac{d}{dt}y = f(j\delta, x_j) - f(t, x^\delta) + f(t, x^\delta) - f(t, x)$$

und es existiert eine Konstante $c_1 > 0$ mit

$$\left| \frac{d}{dt}y \right| \leq c_1(|y| + \delta)$$

Diese Ungleichung ist jeweils in den Intervallen der Zerlegung erfüllt. Zur Zeit 0 ist $y = 0$. Es folgt (falls $y(t) \neq 0$)

$$\frac{d}{dt}(e^{-c_1 t}|y| - c_1 \delta t) \leq 0$$

und die Funktion in der Klammer fällt monoton. Es folgt

$$|y(t)| \leq e^{c_1 t} c_1 \delta t.$$

16.1 Die Verhulstgleichung (Pierre Francois Verhulst 1844, Populationsdynamik)

Die zeitdiskrete Populationsdynamik

$$x_{j+1} = rx_j(1 - x_j)$$

geht auf Verhulst zurück. Hier ist $r > 1$. Die Population wächst fast exponentiell solange sie klein ist. Die Ressourcen reichen nicht aus wenn die Population groß ist: Ist $x_j = 1$ für ein j so werden alle Ressourcen verbraucht und die Population stirbt im nächsten Jahr aus.

Die zeitkontinuierliche Variante

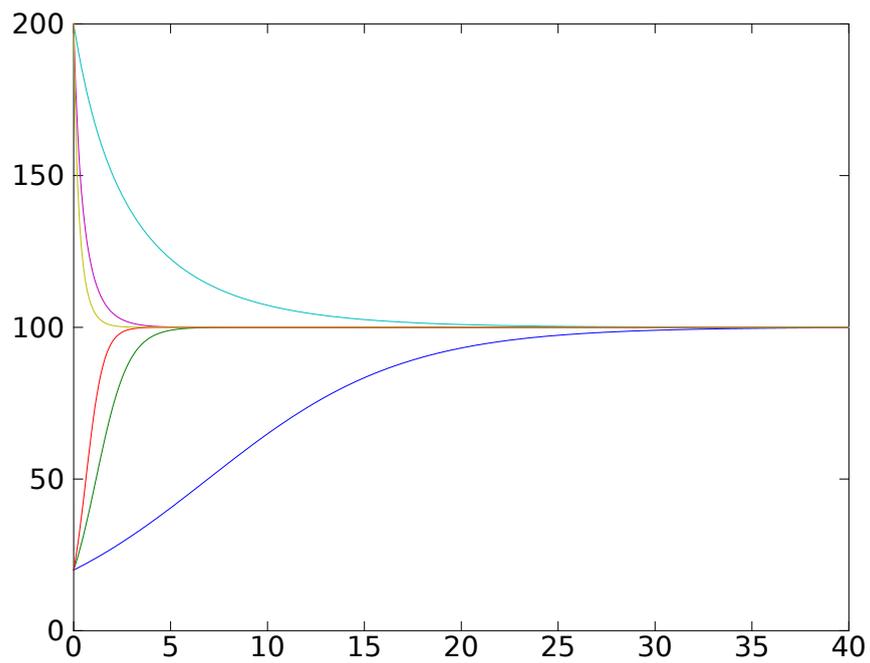
$$L' = cL(1 - \frac{L}{a})$$

ist etwas anders. Sie wurde z.B. zur Beschreibung der Population von Faltern verwendet.

Octave code

```
clear all;
Xend=40;
h=0.1;
a=100;
c=2.2;
y(1)=20;
x=0:h:Xend;
for i=1:(Xend/h)
    y(i+1)=y(i)+h*c*y(i)*(1-y(i)/a);
end
figure(1)
clf();
plot(x,y);
%exakte Lösung
L=a*y(1)./(y(1)+(a-y(1))*exp(-c*x));
hold on
plot(x,L,'g')
max(abs(y-L))
```

Die Simulation für verschiedene Anfangswerte und Parameter sieht so aus:



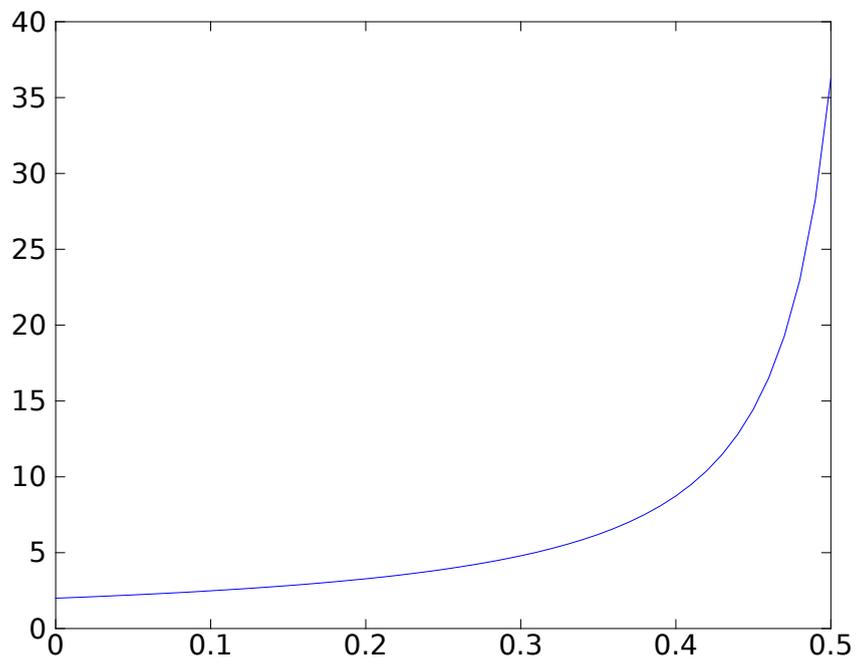
16.2 Blow-up für $\dot{x} = x^2$

$$\dot{x} = x^2$$

$$f(t) = 1, F(t) = t - t_0$$

Octave code

```
clear all;
Xend=0.5;
h=0.01;
y(1)=2;
x=0:h:Xend;
for i=1:(Xend/h)
y(i+1)=y(i)+h*y(i)^2;
end
figure(1)
clf();
plot(x,y);
```



16.3 Michaelis-Menten-Kinetik

Michaelis-Menten-Kinetik

$$\dot{x} = \frac{K}{kt^2} x^2$$

Mittels getrennter Veränderlicher kann die allgemeine Lösung bestimmt werden.

Eine Lösung ist

$$x(t) = \frac{kt}{t + K}.$$

16.4 Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra

Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra

$$\dot{B} = (a - \varepsilon - bR)B$$

$$\dot{R} = (c - \varepsilon + dB)R$$

a und b sind Reproduktionsraten ($c < 0$, da Räuber ohne Beute abnehmen) ε beschreibt die Intensität einer beide Populationen gleichzeitig und gleichmäßig betreffenden Dezimierung, b die Dezimierung der Beute durch Räuber, d der Zuwachs der Räuber durch Beute.

Octave code

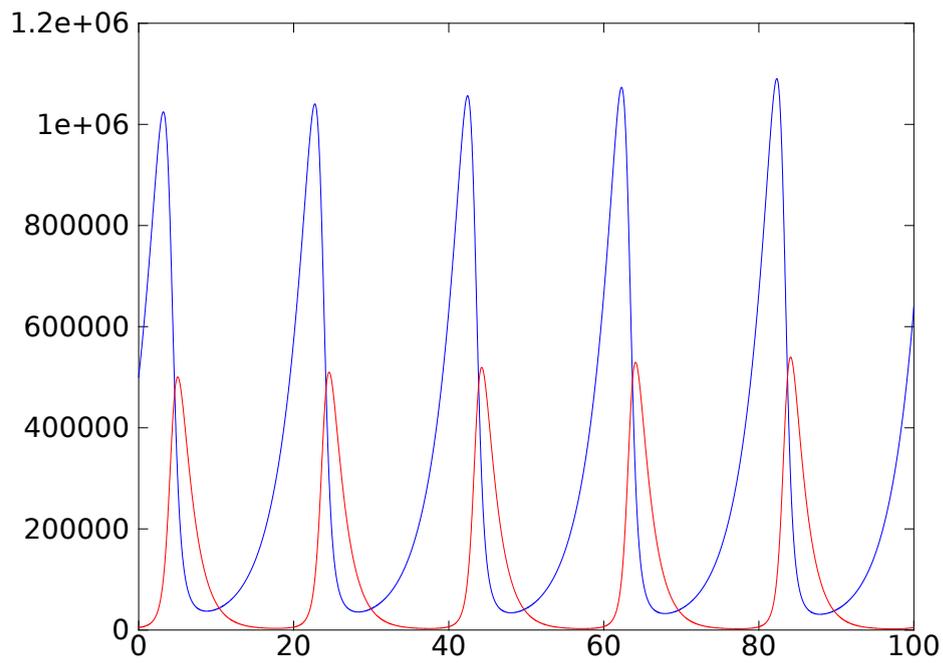
```
clear all
a=0.5;
b=0.000003;
c=-0.5;
d=0.000002;
eps=0.1
h=0.01;

Xend=100;

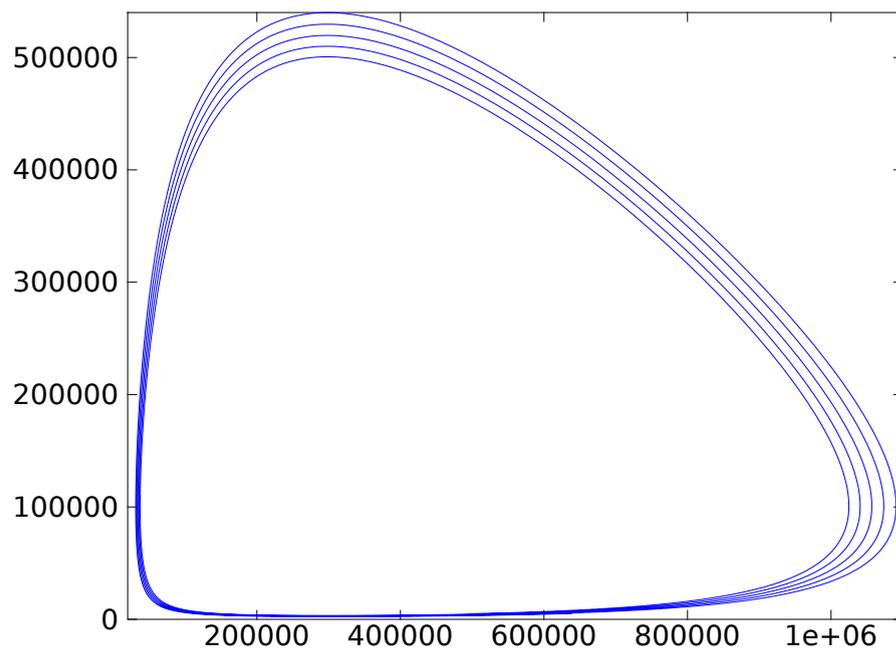
B(1)=500000;
R(1)=5000;
t=0:h:Xend;
    for k=1:(Xend/h)
        %t(k+1)=t(k)+h;
        B(k+1)=B(k)+h*(a-eps-b*R(k))*B(k);
        R(k+1)=R(k)+h*(c-eps+d*B(k))*R(k);
    end
figure(67)
clf()
```

```
plot(t,B)
hold on
plot(t,R,'r')
hold off
figure(33)
clf()
plot(B,R)
```

Wir erhalten folgende Lösungskurve in der $B - R$ Ebene.



Die Populationen der Beute (blau) und des Räubers finden sich in der folgenden Graphik.



Die folgende Variante berücksichtigt die Beschränktheit der Ressourcen für die Beute wie bei Verhulst.

$$\dot{B} = \left(a - \varepsilon - \frac{B}{K} - bR\right)B$$

$$\dot{R} = (c - \varepsilon + dB)R$$

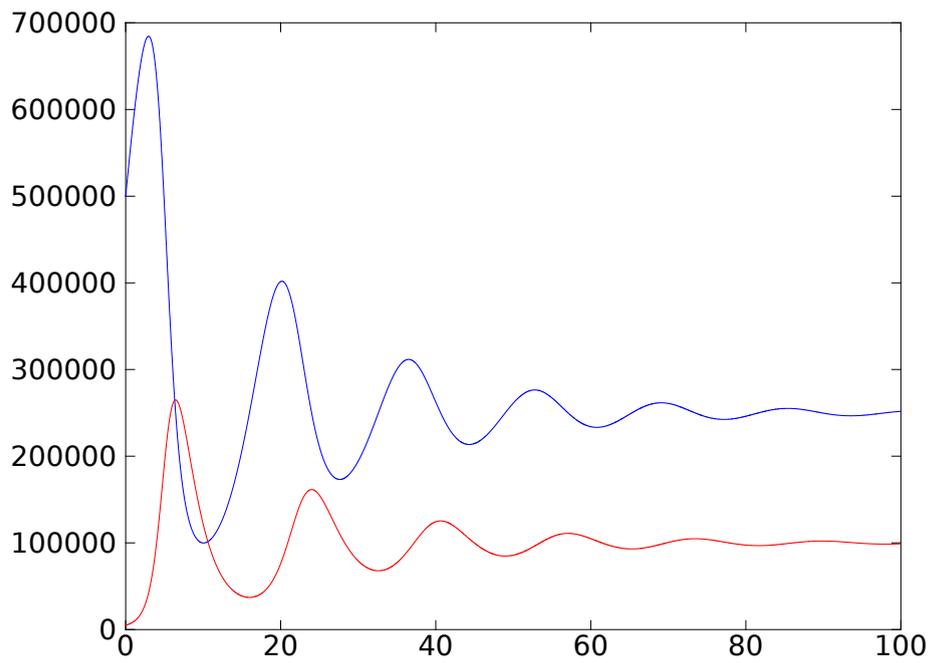
Der Code ist

```
clear all
a=0.5;
b=0.000003;
c=-0.5;
d=0.000002;
%eps=0.1
eps=0
h=0.01;

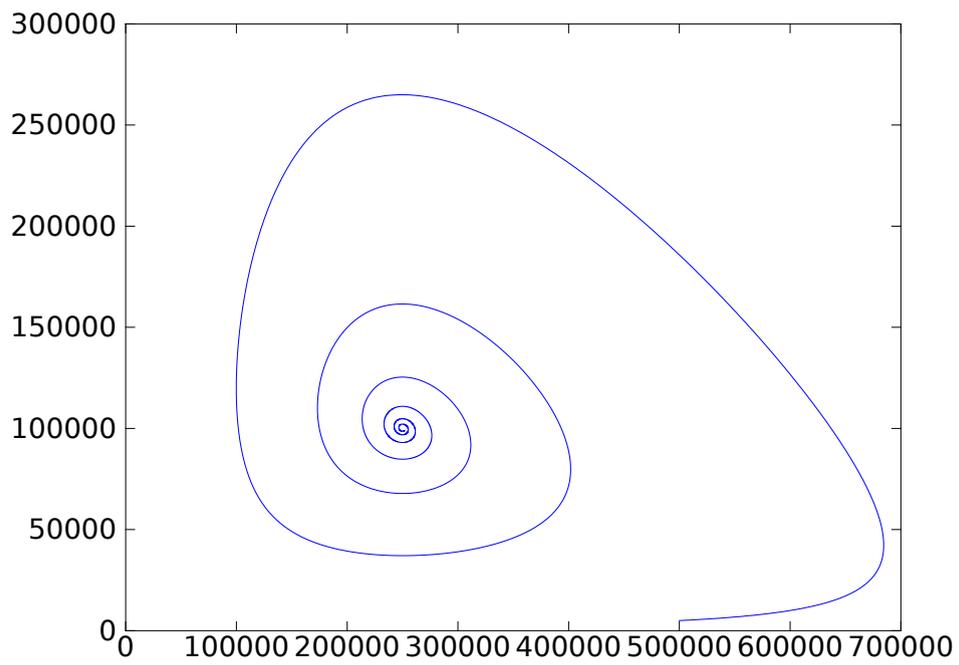
Xend=100;
K=1000000;
B(1)=500000;
R(1)=5000;
x=0:h:Xend;
    for k=1:(Xend/h)
B(k+1)=B(k)+h*((a-eps)*B(k)*(1-B(k)/K)-b*R(k)*B(k));
R(k+1)=R(k)+h*(c-eps+d*B(k))*R(k);
    end
figure(67)
clf()
plot(x,B)
hold on
plot(x,R,'r')
hold off
mean(R./(B+R))

figure(33)
clf()
plot(B,R)
```

Wir betrachten die Kurve in der $B - R$ Ebene



und die Entwicklung der Populationen.



16.5 Die Uedagleichung

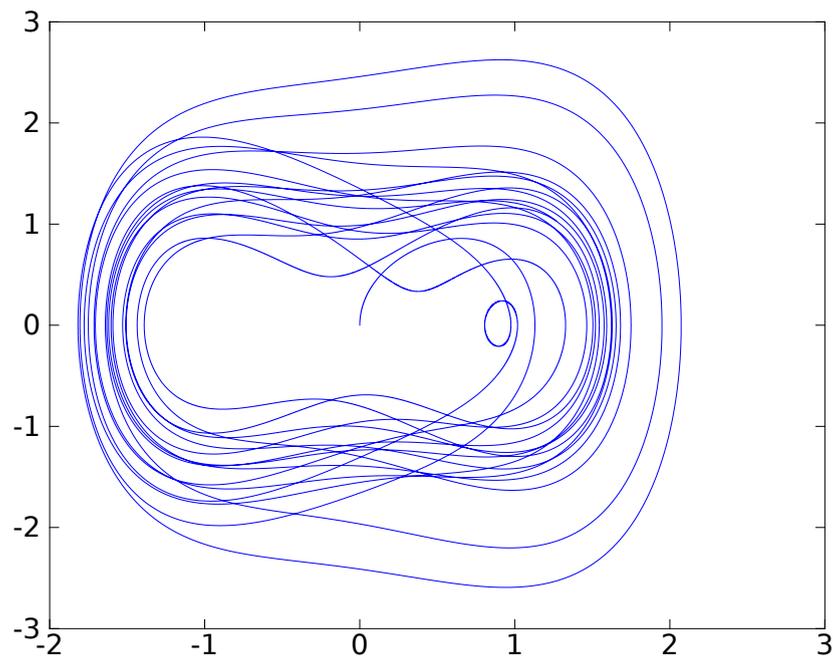
Der Uedagleichung

$$x^{(2)} + 0.05\dot{x} + x^3 = 7.5 \cos t$$

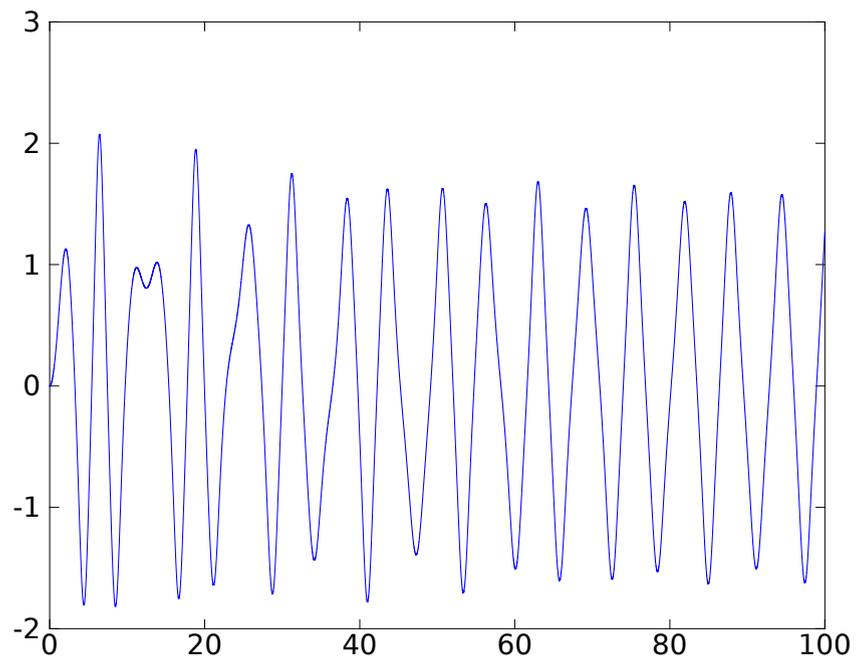
hat Lösungen mit chaotischen Zügen: Minimale Änderungen der Anfangswerte ziehen große Änderungen der Lösung zu späteren Zeitpunkten nach sich.

```
clear all
T=500;
N=100000;
h=T/N;
x(1)=0;
y(1)=0;
t=0:h:T;
    for k=1:N
        x(k+1)=x(k)+h*y(k);
        y(k+1)=y(k)+h*(cos(t(k))-x(k)*x(k)*x(k)-0.05*y(k));
    end
figure(1)
clf()
plot(x,y);
print -dpdf phasen.pdf
figure(2)
clf()
plot(t,x);
print -dpdf dynamik.pdf
```

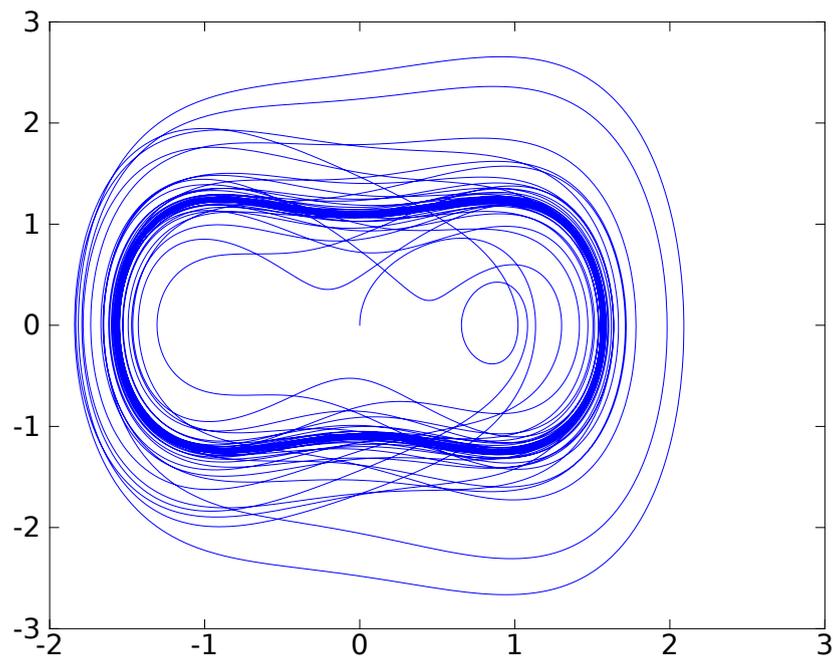
Es folgt das Verhalten bis $T = 100$ in der (x, \dot{x}) Ebene

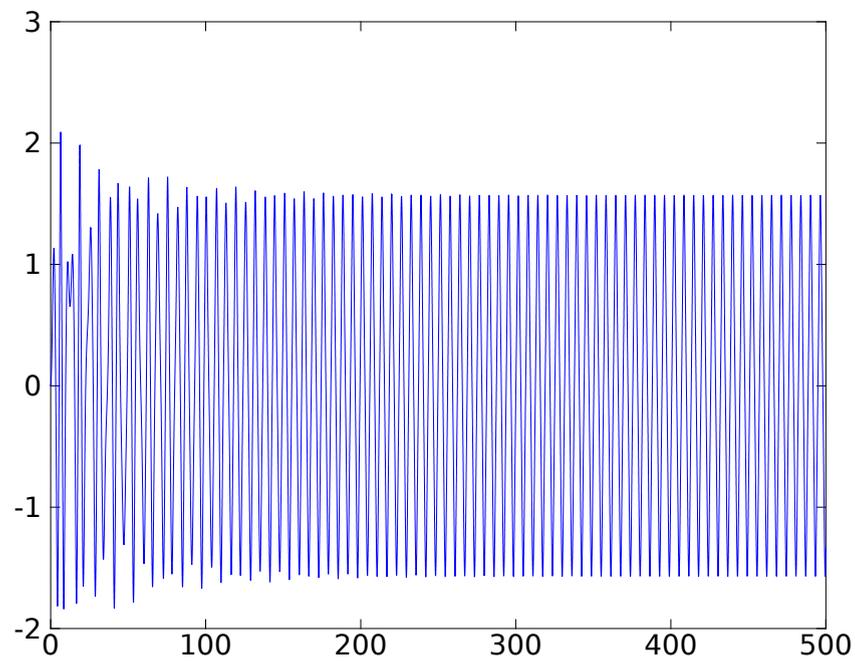


und die Dynamik von x als Funktion der Zeit



und das selbe bis zu einer wesentlich größeren Zeit





16.6 Das Lorentzsystem

Das Lorentzsystem wurde zur Modellierung des Wetters verwendet. Berühmt wurde es, als eine Simulation mit 'falschen' Parametern überraschenderweise chaotische Züge gezeigt hat.

$$\dot{x} = 10(-x + y)$$

$$\dot{y} = 28x - y - xz$$

$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy$$

17 Eigenschaften von Maß und Volumen

In diesem Abschnitt werden wir Eigenschaften von Maß und Integral formulieren, dies es erlauben, mehrdimensionale Flächeninhalte und Volumina zu definieren und zu bestimmen. Wir werden sehen daß ein naiver Umgang mit diesen Begriffen problematisch ist, und skizzieren wie die damit zusammenhängenden Probleme mathematisch gelöst werden können. Hier sind das Lebesguemaß und das Lebesgueintegral zu nennen. Diese Bedeutung dieser Konstruktionen auf die Mathematik und die Inhalte auf Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematische Physik und Differentialgleichungen können kaum überschätzt werden.

Im Folgenden betrachten wir Mengen im \mathbb{R}^n . Jeder Volumenbegriff wird folgende Eigenschaften haben:

- 1) n dimensionale Volumina sind nicht negativ (und möglicherweise ∞).
- 2) Eine Teilmenge hat maximal das Volumen der ganzen Menge.
- 3) Sind A und B disjunkte Teilmengen des \mathbb{R}^n mit n dimensionalem Volumen $|A|$ und $|B|$ so folgt

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- 4) Bewegungen ändern das Volumen nicht.
- 5) Das Volumen des Einheitswürfels $[0, 1]^n = 1$.
- 6) Das Volumen eines Quaders $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \dots [a_n, b_n)$ ist das Produkt der Kantenlängen $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$.

Bemerkungen und Konsequenzen:

- 1) Die Eigenschaft (3) ist auf die naheliegende Art und Weise zu verstehen, falls eines oder mehrere der Volumina unendlich ist. Die zweite Eigenschaft ist eine Konsequenz der dritten.
- 2) Die letzte Eigenschaft (6) folgt aus den anderen Eigenschaften: Wir nehmen an, das Volumen erfülle alle anderen Eigenschaften. Dann ist

$$[0, 1) = [0, 1/2) \cup [1/2, 1).$$

Das zweite Intervall der rechten Seite entsteht durch eine Translation des ersten Intervalls, also sind die Längen gleich. Als Teilmengen von $[0, 1)$ ist ihre Länge (Volumen) endlich. Nach (3) folgt

$$|[0, 1/2)| = 1/2.$$

Genauso sehen wir

$$|[0, 1/2) \times [0, 1)^{n-1}| = \frac{1}{2}$$

und rekursiv

$$|[0, 1/2)^n| = 2^{-n}.$$

Ähnlich folgen

$$|[0, 2)^n| = 2^n,$$

$$|[0, 2^j)^n| = 2^{jn}$$

für $j \in \mathbb{Z}$.

Liegt $0 < a$ zwischen $l2^j$ und $(l+1)2^j$ so folgt

$$[0, l2^j) \subset [0, a) \subset [0, (l+1)2^j)$$

und

$$l2^j = |[0, l2^j)| \leq |[0, a)| \leq |[0, (l+1)2^j)| = (l+1)2^j.$$

Die Differenz der beiden Seiten ist 2^j . Für gegebenes a wählen wir nun eine Folge $j \rightarrow -\infty$ und erhalten eine Intervallschachtelung und

$$|[0, a)| = a$$

Genauso erhalten wir

$$|[0, b_1) \times [0, b_2) \times \dots \times [0, b_n)| = b_1 b_2 \dots b_n.$$

Mit der Translationsinvarianz folgt (6).

- 3) In (6) dürfen wir die halboffenen Intervalle durch beliebige offene, abgeschlossene, oder halboffene Intervalle ohne weitere Änderung ersetzen. Das ergibt sich aus dem obigen Argument.

Es gilt das Prinzip von Cavalieri. Wir definieren zunächst einen Schnitt:

Definition 17.1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (y, t) \in A\}$$

Das Prinzip von Cavalieri besagt *Es seien A und B Teilmengen des \mathbb{R}^n . Gilt (als Teilmengen des \mathbb{R}^{n-1})*

$$|A_t| = |B_t|$$

für jedes t , so folgt $|A| = |B|$.

Wir erhalten sofort interessante Konsequenzen. Die erste geht auf Archimedes zurück und wird in der Schule behandelt.

Lemma 17.2. *Das Volumen der Einheitskugel ist zweimal das Volumen des Zylinders*

$$Z = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\} \times [0, 1)$$

minus dem Volumen des Kegels

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < 1 : x_1^2 + x_2^2 < x_3^2\},$$

$$|B_1(0)|_3 = 2(|Z|_3 - |C|_3).$$

Lemma 17.3. *Das Volumen eines Zylinders ist Grundfläche mal Höhe. Das Volumen eines Kegels ist $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe. Das Volumen einer Kugel vom Radius r ist*

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

Definition 17.4 (Parallelepiped). *Die n Vektoren $f_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq n$ spannen das zugehörige Parallelepiped*

$$P = \left\{x = \sum_{j=1}^n t_j f_j : 0 \leq t_j < 1\right\}$$

auf.

Lemma 17.5.

$$|P| = |\det(f_1, f_2 \dots f_n)|$$

Beweis. Sind die Vektoren orthogonal, so folgt die Aussage aus Eigenschaft 6. Wir betrachten Parallelepipede, die durch (f_j) und $(f_1, f_2, \dots, f_n + \lambda f_1)$ definiert sind. Nach einer Drehung dürfen wir annehmen, dass die ersten $n - 1$ Vektoren f_j , $j \leq n - 1$ in dem Teilraum $\{x : x_n = 0\}$ liegen. Die Schnitte gehen durch Bewegungen auseinander hervor, haben also gleiches $n - 1$ dimensionalen Volumen. Genauso können wir in jeder Koordinatenrichtung argumentieren. Auch die Determinante ändert sich bei dieser Operation nicht. Wir können die gesuchte Formel also auf den Fall reduzieren, dass die Vektoren f_j , $j < n$ orthogonal zu f_n sind. Iterativ erreichen wir eine Reduktion auf den Fall orthogonaler Vektoren, für den wir die Aussage kennen. \square

17.1 Hintergrund zu Existenz und Eindeutigkeit von Volumenbegriffen

Das Paradoxon von Banach-Tarski geht weiter. Es besagt, dass man die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 in 5 Teile zerlegen kann, die zu zwei Kugeln vom Radius 1 zusammensetzen kann:

Satz 17.6 (Banach-Tarski 1924). *Es gibt disjunkte Teilmengen A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 des Einheitsballs $B_1(0)$ in \mathbb{R}^3 und Bewegungen (Isometrien) h_1, h_2, h_3, g_1 und g_2 so dass*

$$B_1(0) = h_1(A_1) \cup h_2(A_2) \cup h_3(A_3) = g_1(B_1) \cup g_2(B_2) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup B_1 \cup B_2.$$

Einen Beweis des Satzes von R. Winkler mit dem Anspruch auf der Basis von Schulmathematik lesbar zu sein finden Sie unter

<http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/bantar.pdf>

Dieses Paradoxon zeigt dass ein naiver Volumenbegriff in der Regel zu Paradoxien führt. Sowohl der Beweis des Satzes wie auch die Entwicklung eines adäquaten Volumenbegriffes sind anspruchsvoll. Eine ebenso befriedigende wie auch weitreichende Behandlung des Volumenproblems mit der Maßtheorie und der Konstruktion des sogenannten Lebesguemaßes gehen auf Lebesgue zurück.

In der Vorlesung Elemente der Mathematik hatten wir einen derartigen Flächenbegriff für Figuren kennengelernt: Bis auf einen Faktor gibt es nur einen Flächeninhalt, der bei derartigen Zerlegungen additiv und invariant unter Drehungen und Translationen ist. Für jeden derartigen Flächeninhalt gibt es eine Konstante C , so dass der Flächeninhalt eines Dreiecks $\frac{1}{2}$ mal Höhe mal Länge der Grundlinie ist. Kern dieser Eindeutigkeitsaussage ist:

Zwei ebene Figuren mit gleichem endlichem Inhalt lassen sich in kongruente Dreiecke zerlegen. Eines von Hilberts berühmten Problemen stellt die Frage, ob es bis auf eine multiplikative Konstante jeder derartige Volumenbegriff auf Figuren im Raum eindeutig bestimmt ist. Überraschenderweise ist die Antwort Nein. Dehn konnte zeigen, dass es Figuren A und B in \mathbb{R}^3 mit gleichem endlichem Volumen gibt, die jedoch nicht in kongruente Tetraeder unterteilt werden können.

17.2 Integral als Volumenbilanz

Wir werden zunächst axiomatisch mit den oben formulierten und weiteren Eigenschaften arbeiten.

Es gilt das verallgemeinerte Prinzip von Cavalieri:

Sind A und B Teilmengen des $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$, und ist das d dimensionale Volumen von

$$\{x \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in A\}$$

gleich dem von

$$\{x \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in B\}$$

identisch für jedes $y \in \mathbb{R}^m$, so stimmen die n dimensionalen Volumen überein.

Wir werden dieses Prinzip Prinzip von Cavalieri nennen.

Die Vorstellung von Ableitung als Änderungsrate führt zu der nützlichen Formel:

$$(17.1) \quad |A| = \int |A_t|_{n-1} dt,$$

die wir auch als Prinzip von Cavalieri bezeichnen werden.

Wir bezeichnen mit

$$A^t = \{x \in A : x_n \leq t\}$$

und das Maß bzw Volumen

$$f(t) = |A^t|_n$$

Die Änderungsrate bezüglich t ist dann

$$|A_t|_{n-1}$$

- falls diese Ableitung existiert. Die obige Formel ist die analoge Aussage für das Integral. Das Integral ist ein uneigentliches Integral. Da der Integrand nichtnegativ ist, ist das Integral eindeutig definiert, wenn wir den Wert ∞ zulassen - und die Frage der (Riemann-)Integrierbarkeit ausklammern.

Mit dieser Formel können wir eine Reihe von Volumina bestimmen.

Lemma 17.7. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ und

$$B = \{x : (x_1, \dots, x_n/\lambda) \in A\}$$

Dann folgt

$$|B| = \lambda|A|.$$

Inbesondere gilt für den Ball mit Radius R ,

$$|B_R(x)|_n = R^n |B_1(0)|.$$

Beweis.

$$|B|_n = \int_{-\infty}^{\infty} |B_t|_{n-1} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A_{\lambda t}|_{n-1} dt = \lambda |A|_n$$

Die zweite Aussage folgt mit n facher Anwendung nach Vertauschen von Variablen. □

Wir ignorieren wieder die Frage, ob das Volumen für die Mengen A und B definiert werden kann. Sei

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < x_{n+1} < e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}\}$$

und I_n das $n + 1$ dimensionale Volumen

$$I_n = |A_n|_{n+1}.$$

Inbesondere ist

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Lemma 17.8. Es gelten die folgenden Formeln

$$I_n = \pi^{n/2}$$

$$I_n = |\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}| \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt$$

Beweis. Wir erhalten zunächst

$$|A_n| = |B_1(0)|_n \int_0^1 (-\ln(t))^{n/2} dt = |B_1(0)|_n \int_0^{\infty} s^{n/2} e^{-s} ds$$

wobei die erste Identität eine Anwendung von Cavalieri ist, und die zweite die Substitution $s = -\ln(t)$.

Genausogut können wir zunächst die Variablen vertauschen und über die x_n Variable integrieren. Der Schnitt mit $x_n = t$ ist

$$B_t = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < y_n < e^{-t^2} e^{-y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2}\}$$

Er hat das n dimensionale Volumen

$$|B_t| = e^{-t^2} I_{n-1}$$

und damit

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} I_{n-1} dt = I_1 I_{n-1},$$

daraus folgen die zweite Formel und

$$I_n = I_1^n.$$

Aus der zweiten Formel erhalten wir für

$$I_2 = \pi \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \pi$$

und damit

$$I_1 = \sqrt{\pi}$$

und

$$I_n = \pi^{n/2}$$

□

Wir erhalten

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt$$

Lemma 17.9. Die Gammafunktion wird für $s > 0$ durch ein uneigentliches Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

definiert. Für $s > 1$ gilt

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

und

$$k! = \Gamma(k+1)$$

sowie

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Beweis. Der Integrand ist nicht negativ, und es genügt für die Existenz des uneigentlichen Integrals, eine Schranke für

$$\int_a^b t^{s-1} e^{-t} dt$$

anzugeben, die nicht von a und b abhängt. Es genügt, dies getrennt für \int_a^1 .. ($a < 1$) und \int_1^b $b > 1$ zu tun. Im ersten Fall gilt

$$\int_a^1 t^{s-1} e^{-t} dt \leq \int_a^1 t^{s-1} dt = \frac{1-a^s}{s} \leq \frac{1}{s}$$

Im zweiten Fall nutzen wir, dass $C > 0$ existiert mit

$$t^{s-1} \leq Ce^{t/2}$$

und

$$\int_1^b t^{s-1} e^{-t} dt \leq C \int_1^b e^{-t/2} dt = 2C(1 - e^{-b/2}) \leq 2C.$$

Eine elementare Rechnung ergibt

$$\int_a^b t^s e^{-t} dt - s \int_a^b t^{s-1} e^{-t} dt = \int_a^b (t^s - st^{s-1}) e^{-t} dt = -t^s e^{-t} \Big|_{s=a}^{s=b}$$

und die rechte Seite geht gegen 0 für $b \rightarrow \infty$ und $a \rightarrow 0$. □

Der Satz liefert

$$\pi^{n/2} = |B_1(0)|_n \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

und das Volumen des n dimensionalen Balles ist

$$(17.2) \quad |B_1(0)|_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Wir erhalten

$$|B_R(0)|_1 = 2R$$

$$|B_R(0)|_2 = \pi R^2$$

$$|B_R(0)|_3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$|B_R(0)|_4 = \frac{1}{2} \pi^2 R^4$$

Eine alternative rekursive Berechnung des Maßes der Einheitskugel geht so:

Offensichtlich ist

$$|B_1(0)^{\mathbb{R}^n}|_n = \int_{-1}^1 |B_{\sqrt{1-t^2}}(0)|_{n-1} dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt |B_1^{\mathbb{R}^{n-1}}(0)|_{n-1}$$

Mit $t = \cos u$ ergibt sich

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \int_0^\pi \sin^n(u) du.$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe von partieller Integration ausgewertet werden.

17.3 Axiome des Lebesguemaßes

Definition 17.10. Es sei X eine Menge. Eine σ Algebra $\mathcal{A}(X)$ auf X ist eine Menge von Teilmengen mit den Eigenschaften

- 1) $\{\} \in \mathcal{A}$
- 2) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$
- 3) $A_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N} \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{A}$.

Das Symbol $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet eine spezielle σ Algebra auf \mathbb{R}^n , die auch alle offenen Mengen enthält. Ihre Elemente werden Lebesguemengen genannt.

Das Lebesguemaß m^n ordnet jeder Lebesguemenge eine Zahl in $[0, \infty]$ zu, wobei ∞ erlaubt ist. Es hat folgende Eigenschaften und ist durch diese eindeutig bestimmt:

- 1) $m^n([0, 1]^n) = 1$
- 2) Für disjunkte Lebesguemengen $A_j \in \mathcal{L}$, $j \in \mathbb{N}$, gilt

$$m^n\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j m^n(A_j)$$

- 3) Geht eine Lebesguemenge A aus der Lebesguemenge B durch eine Translation hervor, so gilt $m^n(A) = m^n(B)$.

Die Konstruktion der Lebesguemengen ist aufwändig, genauso wie die Konstruktion des Lebesguemaßes. Aus diesen Eigenschaften folgen alle Eigenschaften eines Volumens. Wie das Paradoxon von Banach und Tarski zeigt ist es nicht möglich, die Lebesguemengen durch alle Teilmengen zu ersetzen.

18 Das Integral im \mathbb{R}^n

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$B_+ = \{(x, t) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}$$

und

$$B_- = \{(x, t) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq -f(x)\}.$$

Wir wollen das Integral von f über A durch

$$\int_A f dm^n = |B_+|_{n+1} - |B_-|_{n+1}$$

definieren. Es gibt verschiedene Komplikationen: Zunächst müssen für diese Definition B_- und B_+ Lebesguemengen sein, und die Volumina müssen endlich sein, damit wir das Integral als

reelle Zahl definieren können. Die erste Komplikation ignorieren wir: Es ist schwierig, Mengen zu konstruieren, die keine Lebesguemengen sind. Die zweite Komplikation müssen wir immer im Blick haben. Dem Integral

$$\int x dx$$

kann man keinen Wert zuordnen.

Es gelten Rechenregeln:

- 1) Das Integral ist linear:

$$\int_A f + g dm^n = \int_A f dm^n + \int_A g dm^n$$

und

$$\int_A \lambda f dm^n = \lambda \int_A f dm^n$$

- 2) Das Integral ist additiv im Integrationsgebiet. Sind A und B disjunkte Teilmengen so gilt

$$\int_{A \cup B} f dm^n = \int_A f dm^n + \int_B f dm^n$$

- 3) (Monotone Konvergenz) Ist $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Folge von Funktion mit $f_{j+1}(x) \geq f_j(x)$ für alle x und j , sowie $f_j(x) \rightarrow f(x)$ für jedes x , so folgt

$$\int f_j dm^n \rightarrow \int f dm^n$$

wobei die Integrale auch unendlich sein dürfen.

- 4) Es gilt der Satz von Fubini - falls das Volumen von B_+ oder B_- endlich ist

$$\int_{A \times B} f(x, y) dm^{n_1+n_2} = \int_A \int_B f(x, y) dm^{n_2}(y) dm^{n_1}(x)$$

- 5) Die Transformationsformel ersetzt die Substitutionsregel. Sei $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und injektiv. Dann folgt

$$\int_A f \circ \phi | \det D\phi | dm^n = \int_{\phi(A)} f dm^n$$

Der Satz von Fubini ist eine leichte Verallgemeinerung des Prinzips von Cavalieri. Beide Aussagen sind nicht leicht zu beweisen. Wir könnten den Satz von Fubini aus dem Prinzip von Cavalieri ableiten, was aber wenig sinnvoll erscheint, da die Argumentation ohne Betrachtung des Lebesguemaßes sowieso unvollständig ist. Die Transformationsformel verallgemeinert den Fall linearer Koordinatentransformationen. Der Beweis verwendet den lineare Fall: Man zerlegt A in kleine Mengen, auf denen ϕ fast linear ist. Im Beweis muß man dann die Fehler kontrollieren. Diese Rechenregeln erfordern dass alle betrachteten Mengen Lebesguemengen sind (was wir wieder in diesem Kapitel ignorieren) und dass das Maß der Mengen endlich ist, wobei manchmal (z.B. in 3) die Volumina auch unendlich sein dürfen.

Wir betrachten eine Reihe von Beispielen.

18.1 Beispiele

1. Es gilt (für jede Lebesguemenge A)

$$\int_A 1 dm^n = |A|_n$$

Das folgt aus

$$\int_A 1 dm^n = |\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A, 0 < t < 1\}| = \int_0^1 |A|_n dt = |A|_n$$

2. Für (Lebesguemengen) $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^p$ gilt immer

$$|A \times B|_{m+p} = |A|_m |B|_p$$

Diese Formel verallgemeinert 1., auf das sich die Aussage für $p = 1$ und B ein Intervall reduziert.

3. Sei $s > 0$ und $R > 0$. Wir betrachten mit

$$A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| < R, 0 < t < |x|^s\}$$

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |x|^s dm^n &= |A|_{n+1} = \int_0^{R^s} |A_t| dt \\ &= \int_0^{R^s} |B_1(0)|_n (R^n - t^{n/s}) dt \\ &= |B_1(0)|_n (R^{n+s} - \frac{s}{n+s} R^{n+s}) \\ &= \frac{n}{n+s} |B_1(0)|_n R^{n+s} \end{aligned}$$

4. Für $s = 0$ erhalten wir

$$\int_{B_R(0)} |x|^0 dm^n = \int_{B_R(0)} 1 dm^n = |B_1(0)|_n R^n$$

5. Sei $-n < s < 0$ und $R > 0$. Wir betrachten mit

$$A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| < R, t < |x|^s\}$$

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |x|^s dm^n &= |A|_{n+1} \\ &= \int_0^\infty |A_t| dt \\ &= \int_{R^s}^\infty |B_1(0)|_n t^{n/s} dt + |B_1(0)|_n R^{n+s} \\ &= |B_1(0)|_n (1 - \frac{s}{n+s}) R^{n+s} \\ &= \frac{n}{n+s} |B_1(0)|_n R^{n+s} \end{aligned}$$

6. Sei $s < -n$, $R > 0$ und

$$A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| > R, 0 < t < |x|^s\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}} |x|^s dm^n &= \\ |A|_{n+1} &= \int_0^{R^s} |A_t| dt \int_0^{R^s} |B_1(0)|_n (t^{n/s} - R^n) dt \\ &= |B_1(0)|_n \left(\frac{s}{n+s} R^{n+s} - R^{n+s} \right) \\ &= -\frac{n}{n+s} |B_1(0)|_n R^{n+s} \end{aligned}$$

7. Mit der Formel von Fubini folgt für $p > -1$

$$\int_{(0,1)^2} (x_1 x_2)^p dm^2 = \int_0^1 \int_0^1 (x_1^p x_2^p) dx_2 dx_1 = \int_0^1 x_1^p dx_1 \int_0^1 x_2^p dx_2 = \frac{1}{(1+p)^2}$$

8. Wir wollen die Funktion

$$f : (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x_2^{-2} & \text{falls } x_1 < x_2 \\ -x_1^{-2} & \text{falls } x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

integrieren. Wir berechnen

$$\int f(x_1, x_2) dx_1 = \int_0^{x_2} x_2^{-2} dx_1 - \int_{x_2}^1 x_1^{-2} dx_1 = x_2^{-1} + 1 - x_2^{-1} = 1$$

und

$$\int f(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^{x_1} -x_1^{-2} dx_2 + \int_{x_2}^1 x_2^{-2} dx_2 = -x_1^{-1} - 1 + x_1^{-1} = -1.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x) dx_1 dx_2 = 1 \neq -1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x) dx_2 dx_1$$

In diesem Fall gilt die Aussage von Fubini offensichtlich nicht. Das Problem kommt daher dass $|B_+|_{n+1} = |B_-|_{n+1} = \infty$.

9. Im folgenden Beispiel können wir ein iteriertes Integral durch eine Anwendung der Formel von Fubini berechnen. Der Integrand und das Integrationsgebiet sind beschränkt, und daher dürfen wir die Formel von Fubini anwenden.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x_1}^1 \sin\left(\frac{\pi x_1}{x_2}\right) dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{x_2} \sin\left(\frac{\pi x_1}{x_2}\right) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 x_2 dx_2 \\ &= \pi^{-1} \end{aligned}$$

10. Die Menge der rationalen Zahlen hat eindimensionales Maß 0:

Das Maß eines Punktes ist Null. Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar. Sei x_j eine Abzählung und $f_j(x)$ die Funktion, die 1 ist falls $x = x_l$ für ein $l \leq j$, und Null sonst. Sei A_j die Menge der ersten j rationalen Zahlen der Folge. Dann gilt

$$\int f_j dm^1 = |A_j|_1 = 0$$

da A_j eine endliche Menge ist. Mit der monotonen Konvergenz erhalten wir

$$|\mathbb{Q}|_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j dm^1 = 0$$

11. Die folgende Rechnung wird uns eine bemerkenswerte Auswertung der Eulerreihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ erlauben: Wir erhalten den Wert $\frac{1}{6}\pi^2$ für sie.

Satz 18.1. *Es gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis. Wir werten das Integral

$$\int_{[0,1]^2} (1 - x_1 x_2)^{-1} dm^2(x)$$

auf zwei Weisen aus. Es sei

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1, x_2 < 1, 0 < (1 - x_1 x_2)x_3 < 1\}$$

Wir entwickeln den Integranden in eine Reihe mit nichtnegativen Summanden:

$$\frac{1}{1 - x_1 x_2} = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 x_2)^j$$

für $|x_1 x_2| < 1$. Wir vertauschen Summation und Integration (siehe monotone Konvergenz):

$$\int_{[0,1]^2} (1 - x_1 x_2)^{-1} dm^2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{[0,1]^2} (x_1 x_2)^j dm^2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^j dt \right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (1 + j)^{-2}$$

Alternativ werten wir das Integral direkt mit Hilfe der Formel von Fubini aus. Eine Drehung um 45 Grad in der x_1, x_2

$$y = \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 2^{-1/2} & 0 \\ -2^{-1/2} & 2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Ebene bildet A ab auf

$$B = \{y \in \mathbb{R}^3 : 0 < y_1 < \sqrt{2}, |y_2| \leq y_1, |y_2| \leq \sqrt{2} - y_1, 0 < (1 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2)y_3 < 1\}$$

Da das Volumen unter Bewegungen gleich bleibt haben A und B das gleiche Volumen. Wir berechnen das Volumen von B mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} |B| &= \int_0^{2^{-1/2}} \int_{-y_1}^{y_1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2} dy_2 dy_1 + \int_{2^{-1/2}}^{2^{1/2}} \int_{y_1 - \sqrt{2}}^{\sqrt{2} - y_1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2} dy_2 dy_1 \\ &= 4 \int_0^{2^{-1/2}} \frac{1}{\sqrt{2 - y_1^2}} \arctan\left(\frac{y_1}{\sqrt{2 - y_1^2}}\right) dy_1 \\ &\quad + 4 \int_{2^{-1/2}}^{2^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2 - y_1^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2} - y_1}{\sqrt{2 - y_1^2}}\right) dy_1 \end{aligned}$$

Wir berechnen mit $\arctan'(s) = \frac{1}{1+s^2}$

$$g(t) = \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2 - t^2}}\right)$$

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{2 - t^2}}$$

und mit

$$h(t) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2} - t}{\sqrt{2 - t^2}}\right)$$

$$h'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2 - t^2}}$$

und

$$\int_a^b g(t)g'(t)dt = \frac{1}{2}g(t)^2 \Big|_{t=a}^{t=b}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} |B| &= 2 \arctan^2\left(\frac{2^{-1/2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) - 0 + 4 \arctan^2\left(\frac{2^{1/2} - 2^{-1/2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= 6 \arctan(3^{-1/2}) = 6(\pi/6)^2 \\ &= \frac{1}{6}\pi^2 \end{aligned}$$

□

12. Ein Satz für radiale Funktionen.

Satz 18.2. *Es sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative stetige Funktion, $0 \leq a < b \leq \infty$. Dann gilt*

$$\int_{B_b(0) \setminus \overline{B_a(0)}} f(|x|) dm^n = n|B_1(0)| \int_a^b r^{n-1} f(r) dr$$

Beweis. Sei wieder

$$A = \{(x, t) : a < |x| < b, 0 < t < f(|x|)\}$$

und

$$B = \{(r, t) : a < r < b, 0 < t < n|B_1(0)|_n r^{n-1} f(r)\}.$$

Die Aussage des Satzes ist

$$|B|_2 = |A|_{n+1}$$

Wir definieren

$$C = \{(r, t, w) : a < r < b, 0 < t < f(r), 0 < w < |B_1(0)|_n r^{n-1}\}.$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ist $|C|_3 = |B|_2$. Wir definieren

$$C_t = \begin{cases} \{ \} & \text{falls } t \leq 0 \\ \{(r, w) : a < r < b, f(r) > t, 0 < w < |B_1(0)|_n r^{n-1}\} & \end{cases}$$

Die gewünschte Aussage folgt aus

$$(18.1) \quad |A_t|_n = |C_t|_2$$

Sei (\tilde{a}, \tilde{b}) ein maximales Intervall in $\{r : a < r < b, f(r) > t\}$. Dann ist

$$|\{x | \tilde{a} < |x| < \tilde{b}\}| = |B_1(0)|_n (\tilde{b}^n - \tilde{a}^n)$$

und

$$|\{(r, w) | \tilde{a} < r < \tilde{b}, 0 < w < n|B_1(0)|_n r^{n-1}\}| = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} n|B_1(0)|_n r^{n-1} dr = |B_1(0)|_n (\tilde{b}^n - \tilde{a}^n)$$

Die Summation über die den maximalen Intervallen entsprechenden Mengen ergibt (18.1) und damit die gewünschte Aussage. \square

Diese Aussage wird üblicherweise mit der Transformationsformel bewiesen. Der Beweis hier ist elementarer und fundamentaler, aber er weicht von der uns noch nicht wirklich zugänglichen Argumentationslinie der Literatur ab.

19 Das Lebesguemaß

19.1 Einschub: Die Cantormenge

Wir definieren $C_0 = [0, 1]$,

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

und nehmen jeweils das mittlere Drittel aus jedem Intervall heraus

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Genauso definieren wir rekursiv C_j als eine Vereinigung von 2^j Intervallen der Länge 3^{-j} .

Die Mengen sind ineinander enthalten:

$$C_j \subset C_{j+1} \cdots \subset C_1 \subset C_0 :$$

Die Cantormenge ist der Schnitt

$$C = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j.$$

Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist C abgeschlossen. C ist beschränkt und damit kompakt. Die Menge C ist total unzusammenhängend in dem Sinn, dass für $x, y \in C$, $x \neq y$ die Strecke C Punkte aus dem Komplement enthält. Die Menge C enthält kein Intervall positiver Länge. Da die Randpunkte der Intervalle von C_j alle in C_l liegen, und zwar für jedes j und l , und damit in C , existiert zu jedem Punkt x in C eine Folge von Randpunkten der C_j in C , deren Folgenglieder verschieden von x sind, und die gegen x konvergieren. C enthält keinen isolierten Punkt.

Die Menge C ist nicht abzählbar. Genauer existiert eine injektive Abbildung von $[0, 1)$ nach C : Wir ordnen der Binärdarstellung von $s \in [0, 1)$

$$(0, s_1 s_2 \dots)_2$$

von s folgenden Punkt zu: Rekursiv wählen wir ein Intervall in C_j aus. Haben wir das in C_j getan, so wählen wir das untere bzw obere Drittel in C_{j+1} , je nachdem ob $s_{j+1} = 0$ oder $s_{j+1} = 1$. Wir erhalten eine Intervallschachtelung von Intervallen, deren Länge gegen Null geht. Sie enthält also einen Punkt x , der in allen Intervallen, und damit in C liegt.

Die Summe der Intervalllängen in C_j ist $(2/3)^j$, was mit $j \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

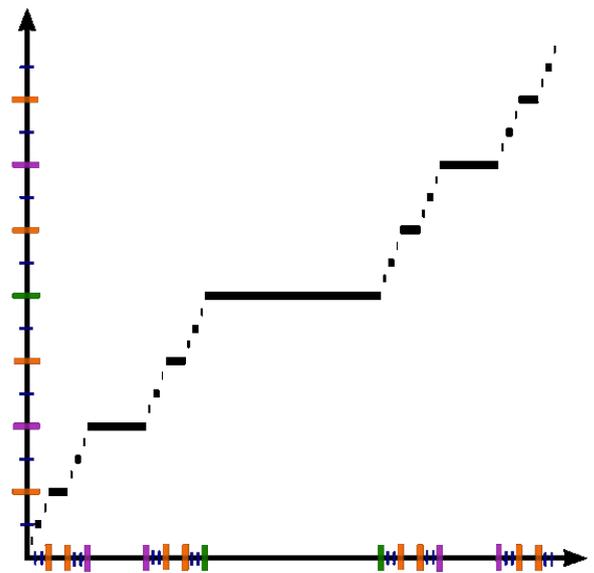
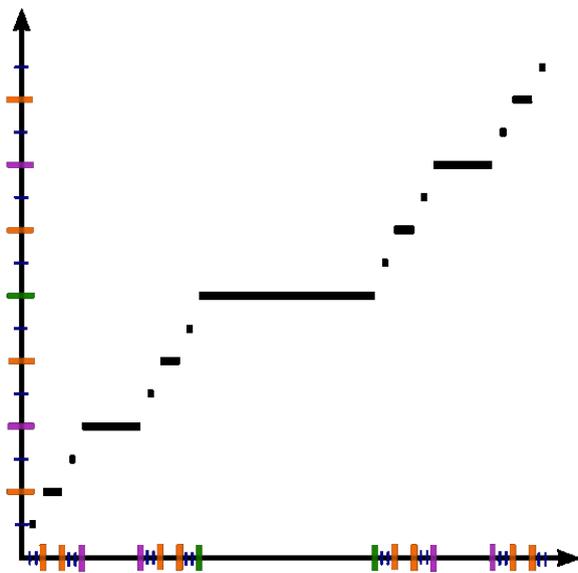
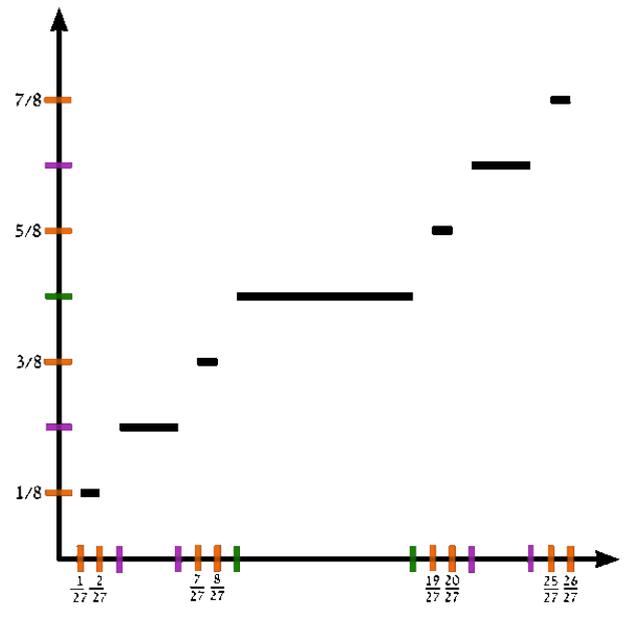
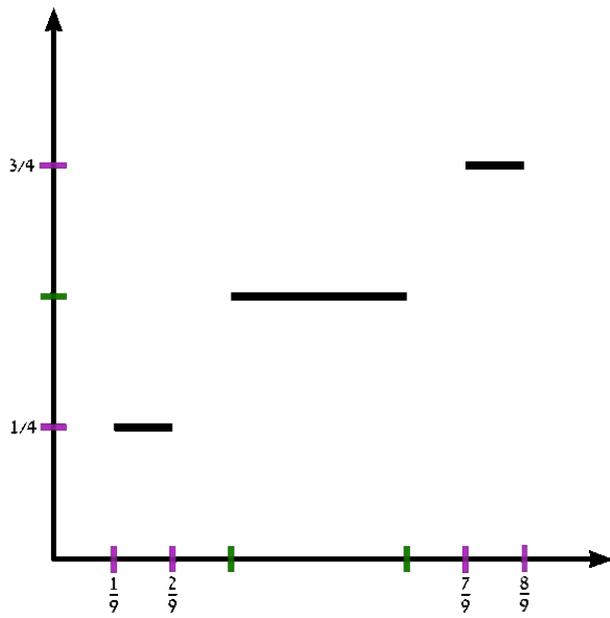
Das eindimensionale Maß der Menge C wird Null sein, obwohl die Menge die Mächtigkeit des Intervalles $[0, 1]$ hat.

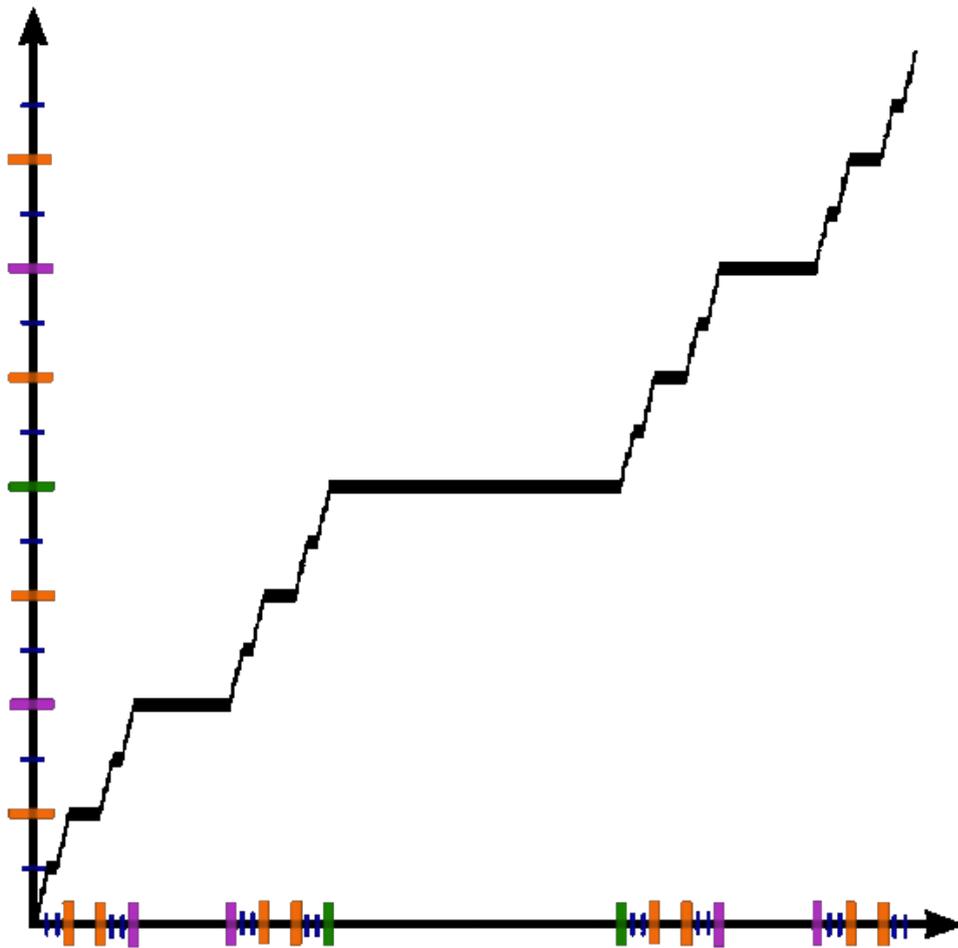
Die Cantor-Lebesguefunktion auf $[0, 1]$ ist folgendermassen definiert: Wir schreiben $s \in [0, 1]$ als

$$s = (0, s_1 s_2 \dots)_3.$$

Ist eine der Ziffern 1, so ersetzen alle Ziffern nach dieser 1 durch Null. Im nächsten Schritt ersetzen wir jede Ziffer 2 durch 1 und interpretieren das Ergebnis als Binärzahl. Diese Prozedur definiert eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach $[0, 1]$, die in den Lücken konstant ist. Der Graph wird Teufelstreppe genannt.

Die folgenden Graphiken zur Cantor-Lebesguefunktion sind aus Wikipedia.





19.2 Das Lebesguemaß

In diesem Abschnitt werden wir Lebesguemengen und das Lebesguemaß definieren. In einem ersten Schritt betrachten wir offene Mengen und dyadische Würfel für $j \in \mathbb{Z}^n$ und $l \in \mathbb{Z}$:

$$(19.1) \quad Q_{jl} = \{x : 2^l j_1 \leq x_1 < 2^l(j_1 + 1); 2^l j_2 \leq x_2 < 2^l(j_2 + 1); \dots\}$$

mit dem Maß (das hier als Definition zu verstehen ist)

$$m^n(Q_{jl}) = 2^{nl}$$

Lemma 19.1. *Aus*

$$Q_{jl} \cap Q_{\bar{j}l} \neq \{\}$$

folgt

$$Q_{jl} \subset Q_{\bar{j}l}$$

oder

$$Q_{\bar{j}l} \subset Q_{jl}.$$

Wir können jede Menge als disjunkte Vereinigung dieser Würfel schreiben.

Lemma 19.2. *Es seien U_j offene Mengen,*

$$U = \bigcup U_j.$$

Zu jedem $x \in U$ existiert genau ein dyadischer Würfel mit Kantenlänge ≤ 1 in U , der in einem der U_j liegt, und entweder maximal ist mit dieser Eigenschaft, oder dessen Kantenlänge 1 ist, und der x enthält.

Beweis. Für $x \in U$ sei $L \subset \mathbb{Z}$ die Menge aller nichtpositiven ganzen Zahlen so dass für $l \in L$ der dyadische Würfel Q_{j_l} , der x enthält, in U liegt. Die Menge L ist nach oben beschränkt, da U nicht der ganze Raum ist. Nach den Peanoaxiomen enthält L eine größte Zahl l . Der Würfel Q_{j_l} hat die gewünschten Eigenschaften. □

Wir erhalten die offensichtliche Konsequenzen aus Lemma 19.1 and Lemma 19.2.

Lemma 19.3. *Die offene Menge U ist disjunkte abzählbare Vereinigung der dyadischen Würfel aus Lemma 19.2 mit $U_j = U$.*

Definition 19.4. *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren*

$$m^n(U) \in [0, \infty]$$

als die Summe über die Maße der dyadischen Würfel von Lemma 19.2 mit $U_j = U$.

Der Wert der Summe ändert sich nicht, wenn wir diese dyadischen Würfel in kleinere dyadische Würfel unterteilen.

Wir könnten an dieser Stelle zeigen dass

$$m^n(B_R(x)) = m^n(B_1(0))R^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}R^n$$

Offensichtlich gilt

$$(2R/\sqrt{n})^n \leq m^n(B_R(0)) \leq 2^n R^n$$

was wir im Folgenden verwenden werden.

Sind U_j offene Mengen so gilt

$$(19.2) \quad m^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^n(U_j).$$

Das folgt mit der Zerlegung von Lemma 19.2, da dann jeder dieser Würfel in mindestens einer Menge U_j liegt. Sind die U_j disjunkt erhalten wir

$$(19.3) \quad m^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^n(U_j).$$

da dann jeder dieser Würfel in genau einer Menge U_j liegt.

Wir definieren nun für beliebige Teilmengen ein sogenanntes äußeres Maß

Definition 19.5. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$m_*^n(A) = \inf\{m^n(U) : A \subset U, \quad U \text{ offen}\}$$

Eigenschaften:

- 1) Für jede offene Mengen gilt

$$m^n(U) = m_*^n(U)$$

- 2) Für jeden Quader gilt

$$\begin{aligned} m^n((a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \dots (a_n, b_n)) &= m_*^n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]) \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \end{aligned}$$

- 3) Eine Menge mit einem Element hat das äußere Maß Null,

$$m_*^n(\{x_j\}) = 0$$

- 4) Für je zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$m_*^n(A \cup B) \leq m_*^n(A) + m_*^n(B)$$

- 5) Es gilt die abzählbare Subadditivität des äußeren Maßes für $A_j \in \mathbb{R}^n$

$$m_*^n\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j m_*^n(A_j)$$

- 6) (Monotonie) Aus $A \subset B$ folgt

$$m_*^n(A) \leq m_*^n(B)$$

- 7) Haben die Mengen A und B einen positiven Abstand, d.h. existiert $\delta > 0$ mit

$$|x - y| \geq \delta \quad \text{für } x \in A \text{ und } y \in B$$

so gilt sogar

$$m_*^n(A \cup B) = m_*^n(A) + m_*^n(B).$$

Der Beweis der abzählbaren Subadditivität ist wie folgt: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des äußeren Maßes existieren offene Mengen $A_j \subset U_j$ mit

$$m^n(U_j) < m_*^n(A_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Die Menge $U = \bigcup U_j$ ist offen (als Vereinigung offener Mengen) und enthält A . Mit der Definition und mit (19.2) folgt

$$m_*^n(A) \leq m_*^n(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^n(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*^n(A_j) + 2^{-j}\varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} m_*^n(A_j) + \varepsilon.$$

Diese Abschätzung gilt für jedes $\varepsilon > 0$. Die abzählbare Subadditivität folgt im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$.

Die übrigen Aussagen folgen aus der Definition und analogen Überlegungen in Kapitel 17.

Lemma 19.6.

$$m_*^n(\mathbb{Q}^n) = 0.$$

Beweis. Die Menge \mathbb{Q}^n ist abzählbar. Sei x_i eine Folge, in der jedes Element von \mathbb{Q}^n genau einmal vorkommt und $\varepsilon > 0$. Wir definieren

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{2^{-j}}(x_j).$$

Diese Menge ist offen und enthält \mathbb{Q}^n . Also folgt

$$m^n(\mathbb{Q}^n) \leq \sum_j (2\varepsilon)^n 2^{-jn} = (2\varepsilon)^n \frac{1}{1 - 2^{-n}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

Definition 19.7. Wir nennen $A \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge falls $m_*^n(A) = 0$.

Ein Beispiel: Die Cantormenge für $n = 1$.

Ähnlich wie oben sieht man: Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen hat das Maß 0.

Definition 19.8. Wir nennen $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue messbar (oder Lebesguemenge oder messbar) falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U existiert mit $A \subset U$ und

$$m_*^n(U \setminus A) < \varepsilon.$$

Für messbare Mengen A definieren wir das Lebesguemaß $m^n(A) = m_*^n(A)$.

Es gilt:

- 1) Jede offene Menge ist messbar.
- 2) Jede Nullmenge ist messbar.
- 3) Jede abzählbare Vereinigung messbarer Mengen ist messbar.
- 4) Abgeschlossene Mengen sind messbar.
- 5) Das Komplement messbarer Mengen ist messbar.
- 6) Abzählbare Schnitte messbarer Mengen sind messbar.

Wir benötigen eine topologische Aussage: Es seien N und M disjunkt kompakte Mengen. Dann ist der Abstand der Mengen positiv. Das folgt aus dem Satz vom Maximum: Die Abbildung

$$x \rightarrow \inf\{|x - y| \mid y \in N\}$$

ist stetig und nimmt das Infimum auf der kompakten Menge M an. Ist dieses Infimum 0 dann ist der Schnitt $N \cap M$ nicht leer, da M kompakt ist.

Beweis. Die erste Aussage ist offensichtlich: Ist A offen und $\varepsilon > 0$, dann wählen wir $U = A$.

Für die zweite Aussage sei A eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Nullmenge existiert eine offene Menge U mit $A \subset U$ und $m^n(U) < \varepsilon$. Dann ist aber auch

$$m_*^n(U \setminus A) \leq m^n(U) < \varepsilon$$

und daher ist A messbar.

Zur dritten Aussage betrachten wir messbare Mengen A_j und $\varepsilon > 0$. Dann existieren offene Mengen U_j mit $A_j \subset U_j$ und $m_*^n(U_j \setminus A_j) < 2^{-j}\varepsilon$. Sei

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j.$$

Dann ist U offen, $A \subset U$ und

$$U \setminus A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \setminus A_j).$$

Daraus folgt

$$m_*^n(U \setminus A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*^n(U_j \setminus A_j) < \varepsilon$$

und ist A messbar.

Für die vierte Aussage genügt es nachzuweisen, dass kompakte Mengen messbar sind, da jede abgeschlossene Menge abzählbare Vereinigung der Schnitte mit abgeschlossenen Bällen vom Radius N ist. Sei $\varepsilon > 0$ und A kompakt. Dann existiert eine offene Menge U , die A enthält, mit

$$m^n(U) < m^n(A) + \varepsilon < \infty$$

Da $U \setminus A$ offen ist ist es eine abzählbare Vereinigung von disjunkten dyadischen Würfeln. Durch Zerlegungen können $U \setminus A$ als disjunkte abzählbare Vereinigung dyadischer Würfel Q_k mit positivem Abstand zu A schreiben.

Für festes N ist

$$K = \bigcup_{k=1}^N \bar{Q}_k$$

kompakt. Da K und A disjunkt und kompakt sind haben sie einen positive Abstand. Also gilt

$$m^n(U) \geq m_*^n(A) + m_*^n(K)$$

und

$$m_*^n(K) < \varepsilon$$

Nun folgt

$$m^n(U \setminus A) = \sum_{k=1}^{\infty} m^n(Q_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} m^n\left(\bigcup_{k=1}^N Q_k\right) \leq \varepsilon.$$

Damit sind abgeschlossene Mengen messbar.

Zum Beweis der fünften Aussage betrachten wir eine messbare Menge A messbar und $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Wir behaupten: B ist messbar. Nach Definition der Meßbarkeit existieren offene Mengen U_j mit

$$m_*^n(A \setminus U_j) < \frac{1}{j}$$

Das Komplement $B_j = \mathbb{R}^n \setminus U_j$ ist abgeschlossen und daher messbar. Dann ist auch $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ messbar. Es gilt $S \subset B$ und

$$B \setminus S \subset U_n \setminus A$$

Daher ist

$$m_*^n(B \setminus S) = 0$$

Damit ist B als Vereinigung der messbaren Mengen S und $B \setminus S$ messbar.

Durch Komplementbildung folgt die letzte Aussage aus der dritten Aussage:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus A_j \right).$$

□

Satz 19.9 (Sigmaadditivität). *Sind $A_j \in \mathbb{R}^n$ disjunkte messbare Mengen so ist $A = \bigcup A_j$ messbar und es gilt*

$$m^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^n(A_j).$$

Beweis. Das Komplement von A ist der abzählbare Schnitt der Komplemente der A_j und damit nach den vorherigen Beobachtungen messbar.

Wir nehmen zunächst an daß alle Mengen A_j beschränkt sind. Da A_j messbar ist, ist auch das Komplement messbar. Es gibt also eine offene Menge V_j mit $(\mathbb{R}^n \setminus A_j) \subset V_j$ und

$$m_*^n(V_j \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A_j)) < \varepsilon 2^{-j}$$

Daraus folgt $E_j = \mathbb{R}^n \setminus V_j \subset A_j$, E_j ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und $m_*^n(A_j \setminus E_j) < \varepsilon 2^{-j}$. Die Mengen E_j sind disjunkt und kompakt, haben also einen positiven Abstand voneinander. Sei

$$E^N = \bigcup_{j=1}^N E_j$$

Dann ist

$$m_*^n(E^N) = \sum_{j=1}^N m_*^n(E_j)$$

und

$$m^n(A) \geq \sum_{i=1}^n m_*^n(E_j) \geq \sum_{i=1}^N m(A_j) - \varepsilon.$$

Es folgt

$$m^n(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) - \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, also auch

$$m^n(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j).$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus der Subadditivität des äußeren Maßes.

Sind die A_j unbeschränkt so schneiden wir sie mit Bällen vom Radius R . In diesen gilt die gesuchte Formel, und wir erhalten die Aussage mit dem Limes $R \rightarrow \infty$. \square

Die Argumente implizieren den folgenden Satz:

Satz 19.10. *Es sei E eine messbare Menge und $\varepsilon > 0$. Dann existieren eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge A mit $A \subset E \subset U$ und*

$$m^n(U \setminus A) < \varepsilon$$

Ist $m^n(E) < \infty$ so können wir A sogar kompakt wählen.

Beweis. Zunächst existieren offene Mengen U und V mit $E \subset U$ und $\mathbb{R}^n \setminus E \subset V$. Sei $A = \mathbb{R}^n \setminus V$. Es gilt

$$m^n(U \setminus E) + m^n(E \setminus A) < \varepsilon.$$

Daraus folgt die erste Aussage. Da immer (siehe nächstes Lemma)

$$m^n(E \cap B_R(0)) \rightarrow m^n(E) \quad \text{mit } R \rightarrow \infty$$

können wir uns auf beschränkte Mengen zurückziehen wenn $m^n(E) < \infty$. Beschränkte abgeschlossene Mengen sind aber kompakt, und daher auch A . \square

Lemma 19.11. *Es seien A_j messbare Mengen, $A_j \subset A_{j+1}$ für jedes j , d.h. die Mengen seien aufsteigend. Dann folgt*

$$m^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} m^n(A_j)$$

Beweis. Die Mengen $B_1 = A_1$, $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ für $j \geq 2$ sind messbar und disjunkt. Deshalb gilt

$$m^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m^n(B_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N m^n(B_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} m^n(A_N)$$

\square

Aus der Konstruktion ergibt sich sofort, dass das Lebesguemaß sich bei Translationen nicht ändert. Die Überlegungen aus Kapitel 17 implizieren dann auch, daß das Lebesguemaß invariant unter Bewegungen bzw Isometrien ist.

Satz 19.12. *Lebesguemengen und Lebesguemaß sind durch folgende Eigenschaften charakterisiert.*

- 1) *Jede offene Menge ist messbar. Mit einer Menge sind auch jede verschobene Menge messbar und das Komplement messbar. Abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar.*
- 2) *Das Maß des Einheitswürfels ist 1.*
- 3) *Das Maß ändert sich unter Translationen nicht.*
- 4) *Das Maß ist abzählbar σ additiv.*
- 5) *Jede Nullmenge des äußeren Maßes ist messbar.*

Dieser Satz folgt direkt aus der Konstruktion. Wir erhalten ein einfache aber wichtige Konsequenz.

Satz 19.13. *Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ messbar. Dann ist $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar und (mit $0\infty = 0$)*

$$m^{n+m}(A \times B) = m^n(A)m^m(B)$$

Beweis. Es genügt A und B mit endlichem und von Null verschiedenem Maß zu betrachten. Zunächst definiert

$$A \rightarrow m^{n+m}(A \times (0,1)^m)$$

ein translationsinvariantes Maß auf \mathbb{R}^m . Nach dem vorherigen Satz ist es das Lebesguemaß, d.h.

$$m^{n+m}(A \times (0,1)^m) = m^n(A).$$

Genauso sieht man daß für festes A mit endlichem, von Null verschiedenem Maß

$$B \rightarrow m^{n+m}(A \times B) / m^n(A)$$

ein Maß auf \mathbb{R}^m definiert, das wieder mit dem Lebesguemaß übereinstimmt. Daraus folgt die Aussage. □

19.3 Die Brunn-Minkowskiungleichung

Definition 19.14 (Summe von Mengen). *Es seien $A, B \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren*

$$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}.$$

Satz 19.15. *Es seien A und B messbare Mengen in \mathbb{R}^n . Dann folgt*

$$(m_*^n(A + B))^{1/n} \geq (m^n(A))^{1/n} + (m^n(B))^{1/n}$$

Sind A und B abgeschlossen, so gilt das auch für $A + B$. In diesem Fall sind die Voraussetzungen erfüllt.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Situation, wenn A und B achsenparallele Rechtecke der Kantenlängen a_j bzw b_j sind. Dann ist $A + B$ ein Rechteck der Kantenlängen $a_j + b_j$. Die zu zeigende Ungleichung ist dann

$$\prod_{j=1}^n (a_j + b_j)^{1/n} \geq \prod_{j=1}^n a_j^{1/n} + \prod_{j=1}^n b_j^{1/n}$$

Ersetzen von x_j durch $x_j/(a_j + b_j)$ reduziert die Aussage auf $a_j + b_j = 1$. Die arithmetisch-geometrische Ungleichung zeigt

$$(19.4) \quad \frac{1}{n} \sum a_j \geq (\prod a_j)^{1/n}.$$

Die arithmetisch-geometrische Ungleichung ist eine Konsequenz der Konvexität der Exponentialfunktion: Da die Exponentialfunktion konvex ist, ist der Logarithmus konkav. Die arithmetisch-geometrische Ungleichung ist nun äquivalent (für $a_j > 0$) zu

$$\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln a_j,$$

was aus der Konkavität folgt.

Wir addieren die Ungleichung (19.4) für a_j und b_j und erhalten die Aussage für achsenparallele Rechtecke.

Als nächstes betrachten wir die Situation wenn A und B die endliche Vereinigung von Rechtecken mit disjunktem Inneren sind, und beweisen die Aussage durch Induktion nach der Zahl der Rechtecke. Die Aussage ist invariant unter Translation von A und B . Wir wählen zwei derartige Rechtecke R_1 und R_2 in A . Sie können durch eine Koordinatenebene getrennt werden. Ohne Einschränkung sei dies $x_1 = 0$. Wir verschieben B und bezeichnen den Teil über der Koordinatenebene mit $\{\}^+$ und den darunter mit $\{\}^-$. Durch die Verschiebung erreichen wir

$$\frac{m^n(B^\pm)}{m^n(B)} = \frac{m(A^\pm)}{m(A)}$$

Es folgt

$$(A^+ + B^+) \cup (A^- + B^-) \subset A$$

wobei die linke Seite im Wesentlichen (bis auf die Nullmenge $x_1 = 0$) eine disjunkte Vereinigung ist. Es folgt mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} m^n(A + B) &\geq m^n(A^+ + B^+) + m(A^- + B^-) \\ &\geq [(m^n(A^+))^{1/n} + (m^n(B^+))^{1/n}]^n + [(m^n(A^-))^{1/n} + (m^n(B^-))^{1/n}]^n \\ &= m^n(A^+) \left[1 + \left(\frac{m^n(B)}{m^n(A)} \right)^{1/n} \right]^n + m^n(A^-) \left[1 + \left(\frac{m^n(B)}{m^n(A)} \right)^{1/n} \right]^n \\ &= \left(m(A)^{1/n} + m(B)^{1/n} \right)^n. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Aussage erst für offene Mengen, und dann für kompakte Mengen. Wir schliessen den Beweis durch eine aufsteigende Approximation von A und B durch kompakte Mengen. \square

Interessant ist der Fall $B = B_r(0)$. Die Fläche des Randes der Menge A könnte man als

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m^n(A + B_r(0)) - m^n(A)}{r}$$

definieren falls dieser Limes existiert. Nach der Brunn-Minkowskiungleichung ist

$$(m^n(A + B_r(0)))^{1/n} \geq (m^n(A))^{1/n} + m^n(B_r(0))^{1/n} r$$

Insbesondere folgt mit $\omega_n = (m^n(B_1(0)))^{1/n}$

$$\omega_n(R + r) = (m^n(B_R(0) + B_r(0)))^{1/n} = (m^n(B_R(0)))^{1/n} + (m^n(B_r(0)))^{1/n}.$$

Wir erhalten die isoperimetrische Ungleichung in der Form: Sei $m^n(A) = m^n(B_R(0))$. Dann folgt

$$(19.5) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m^n(A + B_r(0)) - m^n(A)}{r} \geq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m^n(B_R(0)) + m^n(B_r(0))}{r}$$

und wir interpretieren die linke Seite als den $n - 1$ dimensionalen Flächeninhalt des Randes von B , und die rechte Seite als den $n - 1$ dimensionalen Flächeninhalt von A . Das ist dann die isoperimetrische Ungleichung.

20 Das Lebesgueintegral

Definition 20.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ heißt meßbar, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}$$

meßbar ist.

Die Wahl von \geq , \leq und $<$ ist äquivalent.

20.1 Die Definition für nichtnegative Funktionen

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative meßbare Funktion. Die erste Möglichkeit der Definition ist über das Maß der Menge unter dem Graphen. Sei

$$A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

Wir können das Integral als

$$|A|_{n+1}$$

definieren. Dazu müssen wir nachweisen, dass A meßbar ist.

Die zweite Möglichkeit orientiert sich an dem Prinzip von Cavalieri. Wir definieren das Integral über das Riemannintegral über die Maße der Schnitte:

$$\int_0^\infty m^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) dt$$

Die Mengen sind aufgrund der Definition der Meßbarkeit von f meßbar. Die Funktion

$$g(t) = m^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})$$

fällt monoton. Monotone Funktionen sind Riemannintegrierbar auf kompakten Intervallen. Damit können wir dieses Integral ohne Schwierigkeiten definieren, wir müssen lediglich den Wert ∞ an verschiedenen Stellen zulassen.

Die dritte Möglichkeit der Definition verwendet einfache Funktionen analog zu den Treppenfunktionen beim Riemannintegral.

Wir bezeichnen die charakteristische Funktion der Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit χ_B und definieren

$$\int t \chi_B dm^n = t m^n(B)$$

wenn B meßbar ist. Eine einfache Funktion ist eine Linearkombination charakteristischer Funktionen von meßbaren Mengen. Sind die Koeffizienten t_j nichtnegativ so definieren wir naheliegenderweise

$$\int \sum_{j=1}^N t_j \chi_{B_j} dm^n = \sum_{j=1}^N t_j m^n(B_j).$$

Sei jetzt f eine nichtnegative meßbare Funktion, und f_j eine Folge von einfachen Funktionen mit

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_{j+1}(x)$$

und

$$f_j(x) \rightarrow f(x)$$

für alle x . Dann wollen wir

$$\int f dm^n = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j dm^n$$

definieren. Hier müssen wir die Unabhängigkeit von der Wahl der einfachen Funktionen nachweisen.

Satz 20.2. *Alle drei Möglichkeiten sind wohldefiniert und ergeben die gleiche Zahl (wobei ∞) erlaubt ist.*

Beweisskizze.

Die Wohldefiniertheit und Äquivalenz der drei Definitionen für charakteristische Funktionen, und für nichtnegative einfache Funktionen folgt durch Induktion nach der Anzahl der Summanden.

Sei f_j eine monotone Funktionenfolge wie in der dritten Definition und

$$A_j = \{(x, t) : 0 < t < f_j(x)\}$$

bzw

$$A = \{(x, t) : 0 < t < f(x)\}.$$

Diesen Mengen genügen den Annahmen von Lemma 19.11. Also ist A also monotoner Limes meßbarer Mengen meßbar, und

$$\int f_j dm^n = m^{n+1}(A_j) \rightarrow m^{n+1}(A).$$

Dieser Limes ist unabhängig von der Wahl der einfachen Funktionen.

Umgekehrt sei $h_N(t) = j/N$ mit $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ falls $t \leq N$ und $j/N \leq t < j/(N+1)$, und $h_N(t) = N$ für $t \geq 0$. Dann nimmt für jede meßbare nichtnegative Funktion f $f_N(x) = h_N \circ f(x)$ nur endlich viele Werte an, und ist daher eine einfache Funktion. Außerdem konvergiert $f_N(x) \rightarrow f(x)$ monoton für alle x . Daher ist A meßbar wenn f eine meßbare Funktion ist.

Die Mengen $B_{N,t} = \{x : f_N(x) > t\}$ steigen monoton gegen $B_t = \{x : f(x) > t\}$ auf. Nach Lemma 19.11 folgt

$$g_N(t) := m^n(B_{N,t}) \rightarrow m^n(B_t) =: g(t)$$

für jedes t , monoton für $N \rightarrow \infty$. Die Äquivalenz der zweiten Definition folgt aus

Lemma 20.3. *Seien g_j monoton fallende Funktion auf $(0, \infty)$ mit Werten in $[0, \infty]$, mit*

$$g_j(t) \rightarrow g(t) \quad \text{monoton in } j, \text{ für } j \rightarrow \infty, \text{ und alle } x.$$

Dann folgt

$$\int g_j(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R^{-1}}^R g_j(t) dt \rightarrow \int g(t) dt$$

Beweis. Ist $g_j(t) = \infty$ für ein $t > 0$, so setzen wir $\int_0^\infty g_j(t)dt = \infty$. Im anderen Fall verstehen wir $\int_{\mathbb{R}^{-1}}^{\mathbb{R}} g_j(t)dt$ als Riemannintegral, und $\int_0^\infty g_j(t)dt$ als uneigentliches Riemannintegral, wobei wir den Wert ∞ erlauben. Es genügt zu zeigen: Seien g_j und g wie oben, und g beschränkt auf $[a, b]$. Dann ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b g_j(t)dt = \int_a^b g(t)dt.$$

Aus der monotonen Konvergenz der g_j folgt $\int_a^b g_j(t)dt$ ist monoton wachsend, und $\int_a^b g_j(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$. Die Funktion g ist Riemannintegrierbar. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also eine Zerlegung des Intervalls, so daß die zugehörige Untersumme größer als das Integral minus ε ist. Aus der Konvergenz der g_j folgt die Konvergenz der entsprechenden Untersummen für g_j . Also folgt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b g_j dt \geq \int_a^b g(t)dt - \varepsilon,$$

und damit die Behauptung. □

Jede der drei Definitionen hat andere nützliche Eigenschaften. Die erste gibt dem Integral eine sehr geometrische Bedeutung, und sie erlaubt das Studium von Limiten. Am Anfang des Beweises haben wir den Satz von Beppo Levi bewiesen, den wir hier auch formulieren.

Satz 20.4 (Monotone Konvergenz, Satz von Beppo-Levi). *Es sei (f_j) eine Folge nichtnegativer meßbarer Funktionen, f sei eine meßbare Funktion und N eine Nullmenge. Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ konvergiere f_j monoton gegen f . Dann folgt*

$$\int f_j dm^n \rightarrow \int f dm^n$$

Die zweite Definition erlaubt die direkte Auswertung von Integralen. Wir hatten die Rechnung bei den Gaußschen Funktionen durchgeführt. Die dritte Definition impliziert die Linearität des Integrals, zunächst in der Form

$$\int f + \lambda g dm^n = \int f dm^n + \lambda \int g dm^n$$

für nichtnegative meßbare Funktionen und $\lambda > 0$. Wir definieren

$$f_+ = \max\{f, 0\}$$

und

$$f_- = \max\{-f, 0\}$$

für beliebige Funktionen f .

Lemma 20.5. *Es seien f_j , $1 \leq j \leq N$ meßbare Funktionen und $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $\phi(f_1, f_2, \dots, f_N)$ meßbar. Jede stetige Funktion ist meßbar.*

Definition 20.6. Es sei f eine meßbare Funktion, und entweder

$$\int f_+ dm^n < \infty$$

oder

$$\int f_- dm^n < \infty.$$

Dann definieren wir

$$\int f dm^n = \int f_+ dm^n - \int f_- dm^n.$$

Wir nennen f integrierbar, falls f meßbar ist und

$$\int |f| dm^n < \infty.$$

Satz 20.7. Es seien f und g integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f + \lambda g$ integrierbar und

$$\int f + \lambda g dm^n = \int f dm^n + \lambda \int g dm^n.$$

Beweis. Die Aussage ist klar falls f_{\pm} und g_{\pm} einfache Funktionen sind. Sie bleibt beim Übergang zum Limes erhalten. □

Lemma 20.8. Sind f und g meßbar, f oder g integrierbar und $f \leq g$, dann folgt

$$\int f dm^n \leq \int g dm^n.$$

Es gelten Sätze zum Vertauschen von Limiten und Integration.

Satz 20.9 (Lemma von Fatou). Es seien f_j nichtnegative monotone Funktionen. Dann folgt

$$\int \liminf f_j dm^n \leq \liminf \int f_j dm^n.$$

Beweis. Wir definieren

$$g_j(x) = \inf_{l \geq j} f_l(x).$$

Dann wächst $g_j(x)$ monoton gegen $g := \liminf f_j$. Mit dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\int f_j dm^n \geq \int g_j dm^n \rightarrow \int g dm^n.$$

Daraus folgt die Aussage. □

Satz 20.10 (Konvergenz von Lebesgue). Seien f_j und g meßbare Funktionen, g integrierbar, $|f_j| \leq g$, N eine Nullmenge, $f_j(x) \rightarrow f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Dann ist f integrierbar und

$$\int f_j dm^n \rightarrow \int f dm^n.$$

Beweis. Wir wenden das Lemma von Fatou auf

$$\tilde{f}_j = g + f_j$$

an. Daraus folgt

$$\int g + f dm^n \leq \liminf \int g + f_j dm^n$$

und genauso

$$\int g - f dm^n \leq \liminf \int g - f_j dm^n,$$

woraus

$$\limsup \int f_j dm^n \leq \int f dm^n \leq \liminf \int f_j dm^n$$

und damit die Aussage folgen. □