
Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 13

Aufgabe 49

- a) Definieren Sie die Weglänge eines Weges γ .
b) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } \gamma(t) := (t, f(t))^T$$

gegeben.

Leiten Sie eine Formel für die Weglänge von γ her und begründen Sie Ihre Rechnung.

Aufgabe 50

- a) Definieren Sie die totale Ableitung einer Abbildung von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n .
b) Beweisen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Funktion mit $|f(x)| = o(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$, dann ist $f = 0$ auf \mathbb{R}^m .

Aufgabe 51

- a) Was sind hinreichende Kriterien dafür, dass ein Vektorfeld eine Stammfunktion besitzt?
b) Welches der folgenden Vektorfelder besitzt eine Stammfunktion? Beweisen Sie Ihre Aussage.
(i) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x) := (2x_1x_2 + x_2^3, x_1^2 + 3x_1x_2^2)^T$.
(ii) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x) := (2x_1x_2 + x_2^2, x_1^2 + 3x_1x_2)^T$.
(iii) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{x \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x) := (\frac{3}{x_1^2}x_2 - \frac{6}{x_2}, -\frac{3}{x_1} + \frac{6}{x_2^2}x_1)^T$.

Aufgabe 52

Formulieren Sie den Satz von der Umkehrfunktion und beschreiben Sie die Beweisschritte.