Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 10 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 20. Dezember 2012

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen und geben Sie das maximale Existenzintervall an.

a) $\dot{x} = 3t^{-1} + b(t),\ x(1) = 1$, mit $b(t) = 1,\ b(t) = -1,\ b(t) = t^3,\ b(t) = t^{-3}$.

b) $\dot{x} = (\sin t)x + \sin t,\ x(0) = 0$.

c) $\dot{x} = \frac{a}{t}x,\ x(t_0) = x_0$ mit $t_0 \neq 0$ und $a \in \mathbb{R}$.

d) $\dot{x} = e^x \sinh t,\ x(t_0) = x_0$.

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Lösen Sie die allgemeine Bernoullische Differentialgleichung $\dot{x} = a(t)x + b(t)x^k,\ x(t_0) = x_0$ für stetige Funktionen a und b und $k \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Transformation $z := x^{1-k}$ falls $k \neq 0, 1$.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

Berechnen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungssysteme.

a) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + t\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2 + e^t\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + e^{-t}.\end{aligned}$$

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Gegeben seien das 2×2-System $\dot{x} = A(t)x$ und zwei Lösungen x_1 und x_2. Fasst man diese als Spalten einer Matrix $X = (x_1, x_2)$ auf, so definieren wir $w(t) := \det X$.
Zeigen Sie: w erfüllt die Differentialgleichung $\dot{w} = (\operatorname{spur} A(t))w$.