Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 9 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 13. Dezember 2012

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die implizit gegebene Fläche

$$x^4 \cos(z) + yz \log(x) = x + z$$

lokal bei $(1,3,0)^T$ nach z auflösbar ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der lokalen Auflösung $z = z(x,y)$ an der Stelle $(1,3)^T$.

Aufgabe 34 (10 Punkte)

In welchen Punkten des $\mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = 0, \quad y^2 - z^2 = 0$$

lokal nach $(y,z)^T$ auflösbar?

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y = 1$$

nahe $(0,0)^T$ nach y aufgelöst werden kann und berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Auflösungsabbildung im Punkt 0.

Bitte wenden!

Aufgabe 36 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde der Satz von der impliziten Funktion mit Hilfe des Satzes von der inversen Funktion bewiesen. Tatsächlich kann man die Reihenfolge auch umdrehen und den Satz von der inversen Funktion als Folgerung des Satzes von der impliziten Funktion erhalten. Bringen Sie das folgende Beweispuzzle dieser Tatsache in die richtige Reihenfolge.

a) Für $x \in \Psi(V)$ ist also $f(x) = y \in V$ genau dann wenn $\Psi(y) = x$.

b) Definiere $F : \mathbb{R}^n \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ durch $F(y, x) := y - f(x)$.

c) Der Satz von der impliziten Funktion zeigt dann die Existenz von Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$ von $f(x_0)$ und $U \subset D$ von x_0 und einer stetig differenzierbaren Abbildung $\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Psi(V) \subset U$.

d) Dann ist F stetig differenzierbar auf D mit Ableitungen $D_y F(y, x) = 1_{\mathbb{R}^n}(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ sowie $D_x F(y, x) = -Df(x)$ für alle $x \in D$.

e) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in D$, und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar derart, dass $Df(x_0)$ invertierbar ist.

f) Speziell ist $D_x F(y, x_0)$ umkehrbar für alle $y \in \mathbb{R}^n$.

g) Dies zeigt, dass $Df^{-1}(y) = (Df)^{-1}(f^{-1}(y))$ und somit die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion für $y \in V$ gilt.

h) Für die Ableitung von Ψ erhält man die Formel $D\Psi(y) = -(D_x F)^{-1}(y, \Psi(y)) D_y F(y, \Psi(y))$ für $y \in V$.

i) Außerdem gilt $F(f(x_0), x_0)) = 0$ per Definition.

j) Es folgt, dass $f|_{\Psi(V)} : \Psi(V) \longrightarrow V$ bijektiv und dort die stetig differenzierbare Inverse Ψ besitzt.

k) Desweiteren is $F(y, \Psi(y)) = 0$ für alle $y \in V$ und jedes $(y, x) \in V \times U$ mit $F(y, x) = 0$ erfüllt die Bedingung $x = \Psi(y)$.