**Mathematisches Institut**
Prof. Dr. Herbert Koch
Clemens Kienzler
Wintersemester 12/13

universitätbonn

## Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 7 — Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 29. November 2012

### Aufgabe 25 (10 Punkte)

Besitzen die folgenden Vektorfelder ein Potential? Beweisen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie das Potential, wenn es existiert.

a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) := \begin{pmatrix} 1 + \cos(x_2)e^{x_1} \\ \sin(x_2)e^{x_1} \end{pmatrix}$.

b) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $F(x) := (x_1^2 + x_2^2)^{-1} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) := \begin{pmatrix} 3x_1^2x_2^2x_3 - x_2^3 \\ 2x_1^3x_2x_3 - 3x_1x_2^2 + x_3 \\ x_1^3x_2^2 + x_2 \end{pmatrix}$.

### Aufgabe 26 (10 Punkte)

Nehmen die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsgebiet ihr Minimum/Maximum an? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls die Extremalstellen und Extremwerte an.

a) $f : [-1,1] \times [-2,2] \times [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + x_1 + x_2x_3$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_1 e^{-|x|^2}$.

### Aufgabe 27 (10 Punkte)

Ein Kegelschnitt sei gegeben durch $A := \begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$, $b := -12 \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 4 \\ 4\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$ und $c := 164$. Bestimmen Sie die Art des Kegelschnitts und führen Sie die zugehörige Hauptachsentransformation durch. Skizzieren Sie den Kegelschnitt und seine Brennpunkte in beiden Koordinatensystemen.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 28 (10 Punkte)**

Formulieren Sie folgende Probleme als Extremwertprobleme von Funktionen.

a) Bestimmen Sie die Punkte auf der Kugeloberfläche

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

die vom Punkt $(1,1,1)^T$ den kleinsten beziehungsweise größten Abstand haben.

b) Bestimmen Sie den Punkt auf der Spirale

$$(\gamma) := \left\{(\cos(t), \sin(t), t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, \infty)\right\}$$

der vom Punkt $(1,1,1)^T$ den kleinsten Abstand hat.

c) Bestimmen Sie die Punkte auf der Ellipse von Aufgabe 15, die vom Punkt $(1,1)^T$ den kleinsten beziehungsweise größten Abstand haben.

d) Bestimmen Sie den Punkt auf dem Paraboloid

$$M := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 - x_3 = 1\right\}$$

der vom Punkt $(1,1,1)^T$ den kleinsten Abstand hat.